



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



100 50

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

.....

CINQUANTE-SEPTIÈME CAHIER.

.....



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, N° 55.

—

1887

48.26

LSoc 1640.5

HARVARD COLLEGE LIBRARY

1888, Dec. 20 - 1890, Mar. 29.

Harvard

Journal de l'École Polytechnique. — 57 Cahiers in-4, avec figures,
1794-1836.....

1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

VII ^e et VIII ^e , Chaque cahier.	8 fr. » c.	XXXII ^e	5 fr. » c.
IX ^e comprenant la théorie des fonctions analytiques, par Lagrange.....	7 »	XXXIII ^e	9 »
XI ^e	12 »	XXXIV ^e et XXXV ^e	10 »
XII ^e	12 »	XXXVI ^e et XXXVII ^e	10 »
XIII ^e	8 »	XXXVIII ^e et XXXIX ^e	8 »
XIV ^e	10 »	XL ^e à XLIII ^e	10 »
XVI ^e et XVII ^e	8 »	XLIV ^e à XLVIII ^e	12 »
XXI ^e et XXII ^e	8 »	XLIX ^e	12 »
XXIII ^e	6 »	L ^e	12 »
XXIV ^e	7 »	LI ^e	12 »
XXV ^e et XXVI ^e	8 »	LII ^e	12 »
XXVII ^e	9 »	LIII ^e	12 »
XXVIII ^e	7 »	LIV ^e	12 »
XXIX ^e et XXX ^e	5 »	LV ^e	14 »
XXXI ^e	9 »	LVI ^e	14 »
		LVII ^e	14 »

Journal de l'École Polytechnique. — **Table des Matières** contenues dans
les 37 premiers Cahiers, formant 21 Volumes, suivie d'une Table générale par noms d'au-
teurs. In-4..... 2 fr.

— **Table des Matières** contenues dans les Cahiers XXXVIII à LVI, formant 16 Volumes,
suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4..... 1 fr. 50 c.

**Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en
1794, jusqu'en 1853 inclusivement, suivi de la liste des Elèves admis en
1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. MARIELLE.** Vol.
in-8..... 5 fr.

**Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au Réper-
toire de M. Marielle; par M. LE PRIEUR, Trésorier de l'École.** Vol. in-8..... 3 fr.

1649
147.111
16-3

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES CORPS

ET SPÉCIALEMENT DANS LES GAZ PARFAITS ⁽¹⁾;

PAR H. HUGONOT,
Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

1. Les questions qui font l'objet de ce Mémoire intéressent aussi bien l'Analyse que la Physique mathématique. Les mouvements des corps naturels sont régis par des équations aux dérivées partielles dont la théorie est encore aujourd'hui bien obscure. Tout progrès fait dans l'étude de ces mouvements fournit un renseignement nouveau sur la nature de ces

⁽¹⁾ Ce Mémoire est textuellement celui qui a été présenté à l'Académie des Sciences par M. Hugoniot et déposé au Secrétariat de l'Institut le 26 octobre 1885.

L'Auteur, enlevé par une mort prématurée, n'a pu apporter à sa rédaction primitive les modifications et les compléments qu'il avait, paraît-il, l'intention d'y introduire encore; mais, tel qu'il est, ce Mémoire suffira pour faire apprécier au lecteur le talent élevé que possédait Hugoniot et l'étendue de la perte que la Science a faite en sa personne.

Voulant respecter la pensée de l'Auteur, nous n'avons fait subir aucune retouche à son travail; nous nous sommes bornés à le diviser en deux Parties, en vue des nécessités de l'impression : la seconde Partie sera insérée dans un prochain Cahier.

Dans celle que nous publions aujourd'hui, le lecteur reconnaîtra plusieurs résultats qui ne sont pas nouveaux; c'est la preuve, non d'un défaut d'érudition, mais du souci constant qu'avait l'Auteur de présenter, dans chacun de ses Mémoires, tout ce qui était nécessaire pour le comprendre en son entier.

(Note de la Rédaction.)

équations, spécialement sur les relations qui existent entre les diverses intégrales.

L'esprit éprouve d'ailleurs le besoin de donner aux résultats trop abstraits de l'Analyse une forme plus concrète. C'est ainsi que l'on rend beaucoup plus nette la théorie des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes par une représentation géométrique, en les considérant comme définissant une classe de surfaces. Mais, quand les variables indépendantes sont au nombre de trois ou quatre, cette représentation devient impossible, à moins de faire intervenir l'espace à quatre ou cinq dimensions, ce qui exige un nouveau degré d'abstraction.

Un grand nombre d'équations à trois ou quatre variables prennent au contraire une signification précise quand on les regarde comme définissant le mouvement d'un corps.

2. Je ne m'occuperai, dans ce premier travail, que du cas le plus simple, celui où le mouvement du corps, s'effectuant par tranches parallèles, est régi par une équation à deux variables indépendantes. Chaque intégrale peut alors être représentée par une surface aussi bien que par un mouvement; à chaque mouvement correspond une surface, à chaque propriété de la surface, une propriété du mouvement. Souvent les propriétés s'aperçoivent plus aisément par la représentation géométrique; dans d'autres cas, la représentation mécanique les met plus nettement en évidence. En un mot, pour l'étude des intégrales, l'Analyse, la Géométrie et la Mécanique se prêtent un mutuel concours.

3. L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement d'un corps n'est qu'une condition générale à laquelle tous les mouvements particuliers doivent satisfaire. A la vérité, chaque intégrale représente un mouvement possible qui subsisterait généralement sans modification, si le corps était indéfini dans les deux sens.

Mais d'ordinaire le problème qu'il s'agit de résoudre est le suivant : Étant donné un corps limité, on connaît l'état initial ou plutôt l'intégrale qui représente son mouvement à l'instant initial. Les extrémités sont sou-

mises à des conditions déterminées. On demande le mouvement ultérieur.

Je donne la méthode générale que l'on doit employer pour résoudre ce problème, c'est-à-dire que j'indique avec précision les conditions analytiques auxquelles doivent satisfaire les intégrales qui en expriment la solution.

Je vais exposer sommairement les principes de cette méthode.

Quand le mouvement d'un corps s'effectue par tranches parallèles, il peut arriver qu'il soit, à un instant donné, divisé en deux parties par une section ξ perpendiculaire à la direction des vitesses, le mouvement étant représenté, d'un côté de ξ , par une certaine intégrale et, de l'autre côté, par une autre intégrale.

La tranche ξ est généralement le siège d'un phénomène complexe, par suite duquel de nouvelles intégrales prennent naissance. Toutefois, dans certains cas, l'une des intégrales s'étend purement et simplement aux dépens de l'autre, de sorte qu'à l'instant suivant les mouvements sont encore représentés par les intégrales primitives; seulement la section de séparation n'est plus la même.

Lorsqu'il en est ainsi, je dis que les deux mouvements sont *compatibles* entre eux. L'un de ces mouvements se *propage* dans l'autre avec une certaine vitesse qui est la *vitesse de propagation*.

Quand les deux mouvements ne sont pas compatibles, il naît, dans la tranche de séparation, un nouveau mouvement compatible avec les deux autres, qui se propage ensuite, dans les deux sens, aux dépens des mouvements primitifs.

4. Le mouvement initial d'un corps étant donné, ainsi que les conditions imposées aux extrémités, il se développe, en ces derniers points, des mouvements compatibles avec le mouvement primitif et qui se propagent à ses dépens chacun dans un sens opposé, de sorte qu'ils finissent par faire disparaître le mouvement initial et viennent se rencontrer. Au point de rencontre naît un mouvement compatible avec les deux précédents; il se propage sans modification dans les deux sens jusqu'à ce qu'il rencontre

une des extrémités. Là prend naissance un nouveau mouvement qui se propage comme les précédents, et ainsi de suite.

La détermination analytique du mouvement d'un corps, dans les conditions où l'on s'est placé, exige donc que l'on calcule une infinité de fonctions analytiques, différentes les unes des autres, et dont chacune représente le mouvement d'une partie du corps pendant un certain temps. En d'autres termes, il ne s'agit pas de déterminer un mouvement unique, mais une infinité de mouvements qui se succèdent suivant une certaine loi.

Quand l'un de ces mouvements prend naissance à l'une des extrémités, il doit satisfaire à la condition imposée à cette dernière et être compatible avec le mouvement primitif. Cela suffit à le définir.

Lorsque le nouveau mouvement prend naissance au sein du corps, au point de rencontre de deux autres mouvements, il doit être compatible avec les deux premiers, et ces conditions suffisent encore pour le déterminer.

5. Ce sont les *conditions de compatibilité* qui fournissent les règles nécessaires à la détermination des diverses intégrales qui représentent le phénomène. Je donne dans ce Mémoire l'expression analytique des conditions de compatibilité.

Celles-ci prennent une forme particulièrement remarquable quand les deux mouvements en présence donnent constamment, pour la section commune, la même vitesse, la même dilatation et la même pression, c'est-à-dire quand il ne se produit pas de discontinuité.

Le mouvement que l'on étudie peut être représenté par une surface dont l'ordonnée verticale est le déplacement u d'une tranche x à l'instant t , les coordonnées horizontales étant l'abscisse et le temps.

On sait que ces surfaces, qui figurent les intégrales d'une même équation aux dérivées partielles, peuvent être regardées comme engendrées par certaines courbes appelées *caractéristiques*.

Or, quand il ne se produit pas de discontinuités, on peut énoncer le théorème suivant :

Les surfaces représentatives des deux mouvements compatibles se raccordent le long de la ligne d'intersection qui est une caractéristique commune aux deux surfaces.

Il en résulte que *la vitesse de propagation d'un mouvement A dans un mouvement B est égale au coefficient angulaire de la projection horizontale de la caractéristique commune.*

Ce théorème permet de calculer la vitesse de propagation quand on connaît seulement le mouvement B. En particulier, si ce mouvement est le repos, on peut calculer la vitesse de propagation au moyen de l'équation aux dérivées partielles, sans effectuer aucune intégration.

6. La principale application de la méthode précédente est relative aux fluides non conducteurs et, particulièrement, aux gaz parfaits, renfermés dans des tuyaux cylindriques. Je donne, sous forme finie, les intégrales représentant tous les mouvements qui peuvent se propager dans ces corps, supposés primitivement en repos. *Ces intégrales sont représentées géométriquement par des surfaces développables.*

Il est dès lors facile d'étudier le phénomène de la déformation des ondes, jusqu'au moment où interviennent les réflexions.

Les intégrales dont je fais usage étaient connues depuis longtemps ; mais personne, du moins à ma connaissance, n'avait songé à en déduire les propriétés du mouvement des fluides.

Je montre ensuite que l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, dont on fait usage d'ordinaire, ne représente que des cas très particuliers du mouvement des gaz. Elle doit être modifiée dès que des discontinuités s'introduisent. Le phénomène n'est représenté complètement que par deux équations simultanées du quatrième ordre que l'on peut d'ailleurs, par des changements de variables, ramener à une seule équation du troisième ordre.

7. Le Mémoire est divisé en cinq Chapitres.

Les personnes qui s'occupent exclusivement de Mécanique ou de Phy-

sique sont souvent peu familiarisées avec les caractéristiques, dont on fait un si grand usage dans la Géométrie supérieure. Le Chapitre I^{er} renferme une théorie sommaire de ces courbes, bien suffisante pour l'intelligence des Chapitres suivants.

Je n'attache à ce Chapitre qu'une importance secondaire. Toutefois j'y donne une définition précise des caractéristiques, que j'ai tout lieu de croire nouvelle, et qui conduit immédiatement aux deux équations spéciales à ces courbes, quel que soit l'ordre ou la forme de l'équation aux dérivées partielles à deux variables considérée. Cette définition se généralise sans difficulté et s'applique aux équations à n variables et même aux systèmes d'équations renfermant plusieurs fonctions inconnues, ainsi que je le montrerai dans un prochain travail.

8. Le Chapitre II est consacré à la recherche des équations du mouvement par tranches.

On admet d'ordinaire sans démonstration suffisante que, dans le mouvement d'un gaz parfait, qui ne reçoit pas de chaleur du dehors, et dont on néglige la conductibilité propre, la détente de chaque tranche s'effectue conformément à la loi adiabatique, quelles que soient les variations de vitesse que subissent les molécules. Je démontre rigoureusement, au moyen du principe de l'équivalence, que cette hypothèse est exacte quand la variation de vitesse s'effectue d'une manière continue.

Mais les choses se passent d'une manière bien différente quand il s'introduit des discontinuités dans le mouvement. Lorsqu'une tranche subit l'effet d'une discontinuité, la relation primitive entre la pression et le volume est brusquement modifiée.

On est ainsi conduit à laisser subsister, dans l'équation du second ordre qui régit le mouvement, une fonction arbitraire dont l'expression initiale peut changer dans le cours du mouvement, et dont l'élimination conduirait à deux équations simultanées du quatrième ordre ayant une caractéristique commune.

J'applique une méthode analogue à la formation des équations du mouvement des autres fluides non conducteurs; enfin j'ai encore formé

ces équations pour le cas où le mouvement s'effectue par couches sphériques concentriques.

9. Le Chapitre III renferme la théorie de la propagation du mouvement quand il ne se produit pas de discontinuités. La méthode générale de détermination des intégrales y est exposée avec détails. On y trouvera la démonstration du théorème d'après lequel deux intégrales compatibles ont une caractéristique commune, d'où il résulte que la vitesse de propagation est représentée par le coefficient angulaire de la tangente à la projection horizontale de la caractéristique; j'en déduis les valeurs de la vitesse de propagation pour les divers corps naturels.

Certaines conséquences méritent d'être signalées.

Dans un gaz parfait en repos, la vitesse de propagation est égale à la vitesse normale du son, *quel que soit le mouvement qui se propage*, jusqu'au moment où il s'introduit des discontinuités. Cette vitesse est la même, que le mouvement s'effectue par tranches parallèles ou par couches sphériques. Enfin elle n'est aucunement modifiée par les frottements ou la viscosité, du moins si l'on regarde cette dernière comme n'ayant d'autre effet que d'introduire une résistance fonction de la vitesse. Il en est de même pour tous les fluides non conducteurs.

Je donne une application de la méthode de détermination des intégrales au mouvement d'une tige élastique verticale, fixée à sa partie supérieure, et portant un poids à l'autre extrémité, problème dont la solution n'avait pas encore été donnée en termes finis.

10. L'étude du mouvement d'un fluide non conducteur, renfermé dans une enveloppe cylindrique imperméable à la chaleur, fait l'objet du Chapitre IV. On néglige les forces extérieures, les frottements et la viscosité.

Le fluide étant homogène et en repos, on suppose que l'une de ses extrémités est soumise à une condition déterminée, par exemple, qu'on lui imprime un mouvement connu. Quelle que soit la condition imposée à cette extrémité, pourvu qu'elle ne comporte pas de discontinuités, je démontre que le mouvement qui prend naissance en ce point est représenté

géométriquement par une surface développable. Pour un fluide donné, toutes ces surfaces développables appartiennent à une même classe définie par une équation du premier ordre, facile à déduire de l'équation du second ordre qui régit le mouvement. Les arêtes de rebroussement de toutes ces surfaces ont même indicatrice sphérique.

Le mouvement correspondant à une surface développable se propage dans le fluide avec une vitesse constante jusqu'à ce qu'il parvienne à l'autre extrémité où se produit un phénomène de réflexion. Toutefois, un phénomène nouveau prend naissance quand le mouvement rencontre l'arête de rebroussement de la surface. Il se développe alors une discontinuité dans la tranche extrême atteinte par le mouvement. Le développement de cette discontinuité s'opère ordinairement d'une manière progressive; mais, à partir du moment où elle a pris naissance, l'équation primitive du second ordre cesse de régir l'ensemble du mouvement; car la relation entre la pression et la dilatation se trouve brusquement modifiée pour toutes les tranches qui en subissent l'effet.

On peut même imposer à l'extrémité des conditions telles que la discontinuité en question prenne naissance brusquement. Dans ce cas, la surface représentative du mouvement se réduit à un cône.

11. J'applique ensuite la théorie générale aux gaz parfaits, et je donne, pour ces corps, des formules complètement déterminées et qui conviennent quelle que soit la valeur du rapport des chaleurs spécifiques. Il est cependant nécessaire de considérer à part le cas où, ce rapport étant égal à l'unité, le gaz suivrait la loi de Mariotte, car un grand nombre des formules générales deviennent alors illusoires.

Je donne quelques exemples en déterminant la condition imposée à l'extrémité et j'étudie la manière dont se déforme la courbe qui représente, pour un instant donné, la dilatation ou la vitesse des différents points du gaz. D'après la théorie ordinaire, seule enseignée dans les Cours de Physique, la courbe des dilatations se déplacerait, sans se déformer, avec une vitesse constante. En réalité, la courbe se déforme, suivant une loi d'ailleurs extrêmement simple.

Ainsi qu'on l'a déjà fait observer, le phénomène cesse d'être représenté complètement par ces formules quand le mouvement rencontre l'arête de rebroussement de la surface représentative. La distance à laquelle a lieu cette rencontre dépend naturellement de la condition imposée à l'extrémité. Pour l'air atmosphérique dans les conditions normales de température et de pression, elle est inférieure à 9^m lorsque l'extrémité du tuyau est fermée par une lame vibrante faisant 500 vibrations complètes à la seconde, avec une amplitude de 2^{mm}. Elle est en raison inverse de l'amplitude et du carré du nombre des vibrations.

Enfin je détermine la loi du mouvement qu'il faudrait donner à l'extrémité pour qu'il se produisît brusquement, à une distance donnée X, une discontinuité dans la vitesse des tranches, ainsi que dans leur dilatation, auquel cas la surface développable représentant l'intégrale se réduit à un cône.

12. Ce Chapitre renferme encore quelques autres résultats intéressants. Ainsi je détermine la vitesse limite d'écoulement du gaz, vitesse qui, du reste, ne pourrait être atteinte que si le fluide conservait les mêmes propriétés, même quand sa température s'abaisse au zéro absolu. Cette vitesse est égale à $\frac{2a}{m-1}$, a désignant la vitesse normale du son dans le gaz et m le rapport des chaleurs spécifiques.

Je considère aussi un problème posé par Lagrange et auquel Piobert a consacré la plupart de ses travaux, à cause de ses applications à la balistique intérieure. Une colonne gazeuse est en repos; l'une de ses extrémités est fixe, l'autre limitée par un piston soumis uniquement à la pression du gaz; il s'agit de déterminer le mouvement de ce piston. Je fais voir que, contrairement aux idées de Piobert, le mouvement du mobile ne peut, pas plus que celui du gaz, être représenté par une intégrale unique, mais qu'il dépend d'une infinité d'intégrales dont chacune représente le mouvement pendant un certain temps. Je calcule la première de ces intégrales qui renfermerait à elle seule la solution du problème si la colonne gazeuse avait une longueur infinie. Dans ces conditions la vitesse du mobile converge-

rait vers une limite, indépendante de sa masse, et qui serait précisément égale à la vitesse limite d'écoulement $\frac{2a}{m-1}$.

13. J'aborde dans le Chapitre V l'étude des phénomènes qui se produisent quand il s'introduit des discontinuités dans le mouvement.

Deux cas sont à distinguer, suivant que la relation qui, dans une tranche, existe entre la pression et la dilatation, dépend ou ne dépend pas des transformations qu'elle a subies.

Quand la relation entre la pression et la dilatation de la tranche est invariable, le mouvement est toujours régi par la même équation aux dérivées partielles du second ordre. C'est ce qui a lieu pour un fluide dont la température est maintenue constante en tous les points; on peut aussi admettre qu'il en est de même pour un solide élastique.

Dans ce cas, la condition de compatibilité de deux mouvements s'exprime par une équation unique, malgré les discontinuités. Les surfaces représentant les mouvements compatibles se coupent suivant des courbes qui peuvent être regardées comme la généralisation des caractéristiques. Quand l'équation du mouvement est absolument linéaire, ces courbes se confondent encore avec les caractéristiques; la condition de compatibilité est alors la même, qu'il s'introduise ou non des discontinuités.

14. Mais, lorsque la relation entre la pression et la dilatation d'une tranche dépend des transformations qu'elle a subies, ainsi que cela arrive pour un fluide non conducteur auquel on ne communique pas de chaleur du dehors, le phénomène devient plus complexe. Les conditions de compatibilité sont au nombre de deux.

Deux mouvements A et B non compatibles étant en présence, il s'en développe un autre dans chacune des deux tranches qui sont en contact, et les deux nouveaux mouvements, A' et B', se propagent, le premier dans un sens, le second dans l'autre, aux dépens des mouvements primitifs. La tranche commune aux deux mouvements A' et B' est toujours la même; pour cette tranche, les vitesses sont égales, ainsi que les pressions; mais il n'en est pas de même des dilatations.

15. Je me suis borné à faire l'application de ces théories générales aux gaz parfaits renfermés dans des tuyaux cylindriques. Parmi les résultats que j'ai obtenus, plusieurs méritent d'être signalés.

Lorsqu'une discontinuité se produit dans un gaz parfait, chacune des tranches qui en subit l'effet éprouve, comme on sait, une variation brusque de pression et par suite de densité. Or je démontre que le rapport entre la densité nouvelle et la densité primitive est toujours compris entre deux limites égales à $\frac{m-1}{m+1}$ et $\frac{m+1}{m-1}$, m désignant le rapport des chaleurs spécifiques. Ce théorème, qui semble paradoxal, est cependant une conséquence directe du premier principe de la Thermodynamique.

16. Lorsque deux colonnes gazeuses homogènes, animées chacune d'un mouvement de translation uniforme, se trouvent juxtaposées, les mouvements qui prennent naissance dans les tranches en contact sont analogues aux mouvements primitifs, c'est-à-dire que, pour toutes les tranches atteintes par l'un d'entre eux, la vitesse, la pression et la dilatation sont les mêmes. Les vitesses sont égales dans les deux nouveaux mouvements; il en est de même des pressions.

La pression commune aux deux mouvements est donnée par une équation algébrique du sixième degré qui possède toujours une racine réelle répondant à la question.

17. Une colonne gazeuse étant en repos et limitée par un piston, on peut concevoir qu'on imprime brusquement à ce dernier une vitesse finie que l'on maintient ensuite constante. Dans ces conditions, le mouvement qui prend naissance et se propage dans le gaz est un mouvement uniforme de vitesse égale à celle du piston; toutes les tranches successivement atteintes par le mouvement acquièrent instantanément cette vitesse et subissent une variation brusque correspondante de pression et de dilatation.

Si le mouvement du piston est dirigé de manière à comprimer le gaz, la vitesse de propagation est supérieure à la vitesse normale du son; elle augmente indéfiniment en même temps que la vitesse du piston.

Mais, quand le mouvement du piston est dirigé de manière à dilater le gaz, il existe une vitesse au delà de laquelle le vide absolu se produit à

l'arrière du piston. Cette vitesse est égale à $a\sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$, a désignant comme précédemment la vitesse normale du son et m le rapport des chaleurs spécifiques.

La vitesse du piston croissant de zéro à $a\sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$, la vitesse de propagation du mouvement diminue depuis a jusqu'à $a\sqrt{\frac{m-1}{2m}}$.

18. La question de la résistance que l'air oppose au mouvement des corps est d'une haute importance, surtout au point de vue de la balistique extérieure; mais sa détermination théorique présente des difficultés que l'on ne peut encore aujourd'hui prétendre à surmonter. Les tentatives de Newton, dont la théorie fondée, il est vrai, sur des hypothèses plus que contestables, conduit à des résultats complètement en désaccord avec les faits observés, ne sont pas de nature à encourager les recherches des géomètres.

Ce qui rend la question si difficile, et presque inabordable au calcul, c'est que l'air chassé en avant par le projectile s'écoule latéralement. Cependant l'étude du mouvement d'un mobile dans un cylindre empêchant l'écoulement latéral du gaz peut fournir à ce sujet quelques indications utiles.

On trouvera encore cette étude dans le Chapitre V. Je démontre que la résistance opposée par le gaz au mouvement du mobile est à peu près proportionnelle à la vitesse quand cette dernière est très faible. Le coefficient de proportionnalité croît avec la vitesse; et, quand celle-ci devient très grande, la résistance est sensiblement proportionnelle à son carré.

Il est à remarquer que ce dernier résultat est d'accord avec les expériences exécutées dans l'air libre (¹); toutefois le coefficient de proportionnalité est, comme on devait s'y attendre, inférieur à celui qui correspond au mouvement dans le cylindre. Il en est environ les $\frac{6}{10}$ pour les boulets cylindriques lancés par les canons rayés; quand il s'agit de pro-

(¹) HÉLIE, *Balistique expérimentale*, 2^e édition, t. II, p. 177 et 338. Paris, Gauthier-Villars; 1884.

jectiles à tête hémisphérique ou ogivale, la différence est encore plus sensible.

19. On me pardonnera de n'avoir pas cité les noms des géomètres qui, avant moi, se sont occupés de ces questions. Un historique complet eût exigé de longs développements. Cet historique se trouve du reste en grande partie dans la Notice que M. de Saint-Venant a placée en tête de son commentaire aux Œuvres de Navier.

Il est vrai que, depuis la publication de cet Ouvrage, ont paru des travaux importants, parmi lesquels il faut citer en première ligne ceux de M. de Saint-Venant lui-même sur le choc longitudinal, et un remarquable Mémoire de M. Phillips sur le mouvement des prismes élastiques soumis à des efforts longitudinaux. C'est dans ce Mémoire de M. Phillips qu'apparaissent pour la première fois les solutions en termes finis de problèmes que les géomètres traitaient jusqu'alors par le moyen des séries trigonométriques.

Je dois aussi citer M. Darboux dont les beaux travaux sur les équations aux dérivées partielles du second ordre ne pourront manquer de trouver prochainement leur application dans la Mécanique et la Physique mathématique.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES.

I. — OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

20. L'étude du mouvement des corps naturels conduit à des équations aux dérivées partielles à quatre variables indépendantes. Considérant en effet trois axes de coordonnées Ox , Oy , Oz , chaque point du corps est défini par les trois coordonnées x , y , z , correspondant à un état déterminé auquel on compare tous les autres.

A un certain instant t , les coordonnées x, y, z du point sont devenues $x + u, y + v, z + w$. Les quantités u, v, w sont des fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t et satisfont en général à trois équations aux dérivées partielles dont la forme dépend de la nature du corps.

Dans certains cas le mouvement du corps s'effectue *par tranches parallèles*. Il existe alors dans l'espace une direction MM' , telle que tous les points d'une même section perpendiculaire à MM' ont à chaque instant des vitesses égales et parallèles à cette droite.

Si l'on prend alors MM' pour axe des x , on peut poser constamment $v = w = 0$; la fonction u reste seule à déterminer, mais elle dépend uniquement des deux variables x et t . Le mouvement est alors régi par une seule équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes seulement.

Je n'étudierai dans ce travail que les mouvements par tranches parallèles, me réservant de généraliser plus tard les résultats.

Mais il est indispensable de présenter d'abord quelques considérations générales sur les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, considérations qui seront d'un grand secours pour l'intelligence des phénomènes du mouvement.

Cette étude préliminaire est l'objet de ce Chapitre. Les théories qui s'y trouvent exposées ne sont pas absolument nouvelles; mais elles sont actuellement disséminées dans les Ouvrages de Monge et d'Ampère et n'ont point encore été, du moins à ma connaissance, réunies de manière à former un corps de doctrine.

21. Dans les équations aux dérivées partielles du second ordre qui régissent les mouvements par tranches parallèles, on représente d'ordinaire par u la fonction, par x et t les variables indépendantes dont l'une désigne l'abscisse de la tranche et l'autre le temps. Mais, quand on considère les équations aux dérivées partielles à un point de vue purement analytique, il est plus commode de faire usage des notations de Monge et d'Ampère, qui seront adoptées dans ce Chapitre.

La fonction sera donc désignée par z et les variables indépendantes par

x et y . On posera ensuite

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

On passerait de ces notations à celles qui seront usitées dans les Chapitres suivants en remplaçant z par u , y par t , p par $\frac{\partial u}{\partial x}$, q par $\frac{\partial u}{\partial t}$, etc.

22. Toute relation entre la fonction z , les variables x et y , et les dérivées p, q, r, s, t, \dots constitue une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. L'ordre de cette équation est celui des dérivées les plus élevées.

Parmi les équations d'ordre n , celles qui sont *linéaires par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé* jouissent de propriétés particulières et doivent être distinguées des autres.

Une équation est *absolument linéaire* quand toutes les dérivées ainsi que la fonction n'y entrent que linéairement, de sorte que les coefficients de z, p, q, r, s, t, \dots sont simplement des fonctions de x et y .

23. Toute fonction z de x et y qui, substituée dans l'équation, la rend identique est dite une *intégrale de l'équation*.

Les équations absolument linéaires jouissent d'une propriété remarquable, consistant en ce que la somme de deux intégrales est encore une intégrale.

Une équation aux dérivées partielles admet une infinité d'intégrales. Dans certains cas très particuliers, toutes les intégrales, à l'exception de quelques-unes, dites *intégrales singulières*, peuvent être représentées par une seule expression analytique qui se présente sous forme explicite ou implicite et constitue ce que l'on appelle l'*intégrale générale*.

Mais d'ordinaire il n'en est pas ainsi ; il faut se borner à rechercher les propriétés générales des intégrales d'une équation donnée, sauf à déterminer, pour chaque problème particulier, l'expression analytique de l'intégrale qui en exprime la solution.

Toute intégrale d'une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes peut être regardée comme l'équation d'une surface rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz . La considération de cette surface, dite *surface intégrale*, est d'une grande utilité.

L'équation aux dérivées partielles est la traduction d'une propriété géométrique commune à toutes les surfaces intégrales.

II. — DES CARACTÉRISTIQUES. — CAS OU L'ÉQUATION EST LINÉAIRE PAR RAPPORT AUX DÉRIVÉES DE L'ORDRE LE PLUS ÉLEVÉ.

24. Les surfaces intégrales d'une équation donnée peuvent être regardées comme engendrées par le déplacement d'une certaine courbe, qui se déforme en se déplaçant et à laquelle Monge a donné le nom de *caractéristique*.

Les caractéristiques jouent un rôle important, non seulement au point de vue de la génération des surfaces, mais encore dans les problèmes du mouvement.

Afin de les définir avec clarté, on considérera d'abord une équation linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé. Pour fixer les idées, on supposera qu'il s'agisse d'une équation du second ordre, mais la généralisation n'offre aucune difficulté.

Soit donc

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0$$

une équation du second ordre, linéaire en r , s , t , et dans laquelle H , K , L , M désignent des fonctions quelconques de x , y , z , p , q .

Soit $z_1 = f_1(x, y)$ une intégrale de cette équation : elle peut être représentée par une surface. On appellera *caractéristique* de cette surface les courbes suivant lesquelles elle peut être coupée par une autre surface intégrale, $z_2 = f_2(x, y)$, de manière que les dérivées du premier ordre soient égales le long de l'intersection sans qu'il en soit de même des dérivées du second ordre. Les deux surfaces z_1 et z_2 se raccorderaient ainsi le long de leur intersection.

On va prouver que ces courbes existent et qu'elles satisfont à une même équation différentielle.

25. Par hypothèse, les trois équations suivantes sont satisfaites le long de l'intersection des deux surfaces z_1 et z_2

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 0, \\ p_1 - p_2 &= 0, \quad q_1 - q_2 = 0. \end{aligned}$$

On peut différentier les deux dernières, en regardant y comme une fonction de x définie par la première qui représente évidemment la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces, de sorte que $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la tangente à cette projection. Cette différentiation donne

$$(1) \quad r_1 - r_2 + (s_1 - s_2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(2) \quad s_1 - s_2 + (t_1 - t_2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

D'autre part, en substituant dans l'équation proposée z_1 , puis z_2 , et faisant la différence des résultats, on obtient, puisque les dérivées p et q sont égales le long de l'intersection,

$$(3) \quad H(r_1 - r_2) + 2K(s_1 - s_2) + L(t_1 - t_2) = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) doivent être vérifiées tout le long de l'intersection. Elles sont d'ailleurs homogènes par rapport aux trois différences $r_1 - r_2$, $s_1 - s_2$, $t_1 - t_2$. Si donc les dérivées du second ordre ne sont pas égales le long de l'intersection, il faut que le déterminant s'annule, ce qui donne la condition

$$(4) \quad H \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2K \frac{dy}{dx} + L = 0.$$

C'est une équation différentielle ordinaire du premier ordre qui définit les caractéristiques de la surface z , quand celle-ci est donnée, car les coefficients H , K , L sont alors des fonctions connues de x et de y .

Pour chaque système de valeurs de x et de y , c'est-à-dire pour chaque

point de la surface z_1 , le coefficient angulaire de la caractéristique possède deux valeurs correspondant aux racines de l'équation précédente. Ainsi, par chaque point de la surface passent deux caractéristiques.

On peut regarder les caractéristiques de la surface comme formant deux systèmes distincts correspondant chacun à l'une des racines de l'équation (4). Il est clair que la surface z_1 peut être regardée comme engendrée par l'un ou l'autre de ces deux systèmes de courbes.

Une surface, telle que z_1 , peut évidemment être engendrée par une infinité de systèmes de courbes. Mais, parmi tous ces systèmes, les caractéristiques jouissent d'une propriété particulière. Si, en effet, on considère une autre surface intégrale z_2 se raccordant avec la première suivant la ligne d'intersection, cette dernière est une caractéristique commune aux deux surfaces z_1 et z_2 . Soit C cette courbe d'intersection. Quand la caractéristique du même système se déforme et se déplace pour engendrer la surface z_1 , il arrive un moment où elle vient se confondre avec C , et l'on peut alors passer de la surface z_1 à la surface z_2 sans changer le mode de génération.

La surface obtenue sera constituée par une portion de z_1 et une portion de z_2 et jouira néanmoins de toutes les propriétés des surfaces intégrales. Seulement on rencontrera une discontinuité dans les dérivées secondes tout le long de la courbe C .

Le mode de génération par les caractéristiques est donc préférable à tout autre, car il permet de passer d'une surface intégrale à une autre.

Quand la surface intégrale z_1 n'est pas donnée, l'équation (4) est généralement insuffisante pour donner quelques notions sur la forme de la courbe. Toutefois, si l'équation aux dérivées partielles est absolument linéaire, les coefficients de l'équation (4) dépendent uniquement de x et de y , de sorte que les projections horizontales des caractéristiques sont les mêmes pour toutes les surfaces intégrales et peuvent être déterminées par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

La même propriété subsiste encore quand, l'équation proposée n'étant pas absolument linéaire, les coefficients des dérivées les plus élevées sont indépendants de z , p et q .

26. Il existe une deuxième équation qui a lieu tout le long d'une caractéristique déterminée; elle correspond d'ailleurs à une propriété nouvelle qui pourrait servir de définition à cette courbe.

Si l'on considère une courbe définie tracée sur une surface intégrale, on obtient, en différentiant le long de cette courbe les dérivées du premier ordre,

$$\frac{dp}{dx} = r + s \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dq}{dx} = s + t \frac{dy}{dx}.$$

Multipliant ces équations par λ , μ et ajoutant, il vient

$$\lambda \frac{dp}{dx} + \mu \frac{dq}{dx} = \lambda r + s \left(\lambda \frac{dy}{dx} + \mu \right) + \mu \frac{dy}{dx}.$$

On peut chercher à déterminer λ et μ , de manière que le second membre devienne, à un facteur constant près, identique avec l'ensemble des termes qui, dans l'équation proposée, sont affectés des dérivées du deuxième ordre. Il faut, pour cela, que

$$\lambda - \alpha H = 0, \quad \lambda \frac{dy}{dx} + \mu - 2\alpha K = 0, \quad \mu \frac{dy}{dx} - \alpha L = 0.$$

Ces équations sont homogènes en λ , μ , α ; elles ne peuvent admettre un système de solutions différent de zéro que si le déterminant s'annule, ce qui donne la condition

$$H \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2K \frac{dy}{dx} + L = 0,$$

laquelle n'est autre que l'équation des caractéristiques. Ainsi, pour qu'on puisse déterminer λ et μ , conformément à la condition qu'on s'est imposée, il faut et il suffit que la courbe considérée soit une caractéristique.

Faisant alors $\alpha = 1$, on trouve

$$\lambda = H, \quad \mu = 2K - H \frac{dy}{dx}.$$

et par suite on a, le long de la caractéristique,

$$H \frac{dp}{dx} + \left(2K - H \frac{dy}{dx} \right) \frac{dq}{dx} = Hr + 2Ks + Lt.$$

Mais, en vertu de l'équation proposée, le second membre est égal à $-M$. Ainsi

$$(5) \quad H \frac{dp}{dx} + \left(2K - H \frac{dy}{dx} \right) \frac{dq}{dx} + M = 0.$$

C'est la deuxième équation des caractéristiques.

27. En plus des équations (4) et (5), qui sont spéciales aux caractéristiques, il en existe une autre qui a lieu le long de toute courbe tracée sur la surface. C'est la suivante :

$$(6) \quad \frac{dz}{dx} = p + q \frac{dy}{dx}.$$

Le long d'une caractéristique, les quantités y , z , p et q peuvent être regardées comme des fonctions de la variable x qui ne pourraient être définies qu'au moyen de quatre équations. Or on ne possède que les trois équations (4), (5) et (6) qui sont insuffisantes pour la détermination des quatre fonctions inconnues, de sorte que, le long de l'une de ces courbes, on peut, en général, se donner l'une des quatre fonctions y , z , p ou q ; les caractéristiques sont donc, d'ordinaire, bien loin d'être déterminées.

Toutefois il existe des cas d'exception. Ainsi, quand les coefficients des dérivées du second ordre sont fonctions de x et y seulement, la fonction y est déterminée, sauf une constante arbitraire, et l'on ne peut se donner à volonté que l'une des fonctions z , p ou q . Il peut même arriver que les caractéristiques soient complètement déterminées de forme.

C'est ainsi que, si l'on considère l'équation

$$r + 2as + a^2t = 0,$$

la première équation des caractéristiques a ses deux racines égales et se

réduit à

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad \text{d'où} \quad y = ax + b.$$

Les deux autres équations sont

$$\frac{dp}{dx} + a \frac{dq}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = p + aq.$$

La première donne $p + aq = \alpha$, α désignant une constante arbitraire, et la deuxième exige, par suite, que

$$z = \alpha x + \beta.$$

Les caractéristiques sont alors des lignes droites. L'indétermination ne porte que sur les fonctions p et q , dont l'une peut être prise à volonté.

Pour l'équation que l'on vient d'examiner les deux racines de l'équation (4) sont égales. Les équations aux dérivées partielles, qui jouissent de cette propriété d'avoir leurs caractéristiques confondues, se distinguent nettement des autres et devraient faire l'objet d'une étude spéciale, qu'il n'y a pas lieu d'entreprendre ici, car on ne rencontrera pas d'équations de ce genre dans les problèmes de la propagation du mouvement.

Je ne m'occuperai pas davantage de l'examen des cas où l'on parvient, au moyen des équations des caractéristiques, à déterminer l'intégrale générale de l'équation proposée. Ces recherches ne seraient que d'une faible utilité pour l'étude des problèmes de la propagation du mouvement dans les corps, telle qu'elle doit être faite ici.

28. La théorie relative aux équations du deuxième ordre se généralise avec une telle facilité qu'on se bornera à énoncer les résultats relatifs à une équation d'ordre n linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé.

Les caractéristiques d'une surface intégrale z_1 , sont les courbes suivant lesquelles cette surface peut être coupée par une autre intégrale z_2 , de manière que, le long de la ligne d'intersection, les dérivées des $n - 1$ premiers ordres des fonctions z_1 et z_2 soient égales sans qu'il en soit de même

des dérivées d'ordre n . Les deux surfaces z_1 et z_2 qui se coupent dans ces conditions admettent la courbe d'intersection comme caractéristique commun.

Les caractéristiques d'une équation d'ordre n sont donc les génératrices naturelles de ses surfaces intégrales.

Soit

$$A \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + B \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + C \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + R \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + M = 0$$

l'équation proposée; l'équation des projections horizontales des caractéristiques est

$$(7) \quad A \left(\frac{dy}{dx} \right)^n - B \left(\frac{dy}{dx} \right)^{n-1} + C \left(\frac{dy}{dx} \right)^{n-2} - \dots \pm R = 0.$$

Il existe n systèmes de caractéristiques.

La deuxième équation spéciale à ces courbes s'obtient comme pour le deuxième ordre. Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les n dérivées d'ordre $n-1$; cette deuxième équation est

$$(8) \quad \begin{cases} A \frac{d\omega_1}{dx} - \left(A \frac{dy}{dx} - B \right) \frac{d\omega_2}{dx} \\ + \left[A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C \right] \frac{d\omega_3}{dx} - \dots + M = 0. \end{cases}$$

Enfin on doit joindre aux équations précédentes celles que l'on obtient en différentiant, le long d'une courbe quelconque, la fonction z et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-2$, savoir

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = p + q \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dp}{dx} = r + s \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} = s + t \frac{dy}{dx}, \end{cases}$$

etc.

Comme il existe $n-1$ dérivées d'ordre $n-2$, les équations (9) sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$. Le nombre des équations qui ont lieu le long de la caractéristique est ainsi égal à $\frac{n(n-1)}{2} + 2$.

Mais ces équations renferment comme fonctions inconnues y, z et les dérivées de z jusqu'à l'ordre $n - 1$; le nombre des fonctions inconnues est ainsi égal à $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Le nombre des fonctions surpasse celui des équations de

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{n(n-1)}{2} - 2 = n - 1.$$

On peut donc, en général, se donner arbitrairement, le long de la courbe, $n - 1$ de ces fonctions; les autres seront alors déterminées. Il y a, bien entendu, des cas particuliers où certaines des fonctions sont données à l'avance. Si, par exemple, l'équation proposée est absolument linéaire, la fonction y est déterminée par l'équation (7), sauf des constantes arbitraires.

Pour le premier ordre, le nombre des fonctions est égal à celui des équations et les caractéristiques sont entièrement déterminées.

III. — CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS QUI NE SONT PAS LINÉAIRES PAR RAPPORT AUX DÉRIVÉES DE L'ORDRE LE PLUS ÉLEVÉ.

29. La définition qui vient d'être donnée pour les caractéristiques doit être modifiée quand l'équation proposée n'est pas linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé. A proprement parler, cette modification n'est autre qu'une généralisation, car la définition nouvelle conduit, pour les équations linéaires, aux mêmes résultats que la précédente. C'est uniquement pour rendre l'exposition plus claire que celles-ci ont été considérées tout d'abord.

Pour éviter une trop grande complication dans les notations et dans les formules, on se bornera encore à présenter la théorie pour une équation du second ordre.

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Soit z une intégrale de cette équation. On représentera par $z + \delta z$ une

intégrale infiniment voisine, δz désignant la variation éprouvée par la fonction quand, x et y restant les mêmes, on passe de la première intégrale à la seconde. On doit avoir

$$F(x, y, z + \delta z, p + \delta p, q + \delta q, r + \delta r, s + \delta s, t + \delta t) = 0,$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \delta r + \frac{\partial F}{\partial s} \delta s + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0.$$

Mais on a

$$\delta r = \delta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}, \quad \delta s = \delta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x \partial y}, \quad \dots$$

L'équation (2) peut donc être regardée comme une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, dans laquelle la fonction inconnue est δz . Les coefficients de δr , δs , ..., δz sont, il est vrai, des fonctions non seulement de x et y , mais encore de z , p , q , r , s , t . Toutefois, l'intégrale z étant supposée donnée, ces coefficients peuvent être exprimés en fonction de x et y , et, par suite, l'équation (2) est absolument linéaire. On peut donc écrire immédiatement l'équation de ses caractéristiques, savoir

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial s} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Une surface intégrale étant donnée, ces courbes sont entièrement définies par l'équation qui précède; on les regardera comme les caractéristiques de cette surface.

Les caractéristiques des surfaces intégrales d'une équation non linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé sont les courbes suivant lesquelles chacune de ces surfaces peut être rencontré par une surface intégrale infiniment voisine, de manière que, les dérivées du premier ordre étant rigoureusement égales le long de l'intersection, les dérivées du second ordre présentent une discontinuité. Cette discontinuité est, d'ailleurs, infiniment petite; en d'autres termes, elle converge vers zéro en

même temps que la différence δz des ordonnées des surfaces infiniment voisines.

30. On peut, comme pour l'équation linéaire en r, s, t , former une deuxième équation, spéciale aux caractéristiques. Représentant, en effet, par u, w, v et ν les quatre dérivées du troisième ordre de la fonction z , on a, le long d'une courbe quelconque tracée sur la surface,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dx} = u + w \frac{dy}{dx}, \\ \frac{ds}{dx} = w + v \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dt}{dx} = v + \nu \frac{dy}{dx}. \end{cases}$$

Différentiant l'équation proposée par rapport à x , on obtient

$$(5) \quad u \frac{\partial F}{\partial r} + w \frac{\partial F}{\partial s} + v \frac{\partial F}{\partial t} + N = 0,$$

N désignant l'ensemble des termes indépendants des dérivées du troisième ordre.

Multipliant les deux premières équations (4) par λ, μ et ajoutant, on peut chercher à disposer de ces coefficients de manière que le second membre de l'équation reproduise, à un facteur constant près, l'ensemble des termes qui, dans (5), sont affectés des dérivées du troisième ordre. Il faut, pour cela, que l'on ait

$$\lambda - \alpha \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad \lambda \frac{dy}{dx} + \mu - \alpha \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad \mu \frac{dy}{dx} - \alpha \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

soit trois équations homogènes en λ, μ, α . Pour qu'elles soient compatibles, le déterminant doit s'annuler. En exprimant cette condition, on retrouve précisément l'équation (3) des caractéristiques.

Si donc la courbe considérée est une caractéristique, le problème est possible; faisant $\alpha = 1$, on trouve

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dy}{dx}.$$

La deuxième équation des caractéristiques est donc

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dy}{dx} \right) \frac{ds}{dx} + N = 0.$$

Si l'on avait considéré les deux dernières équations (4) et qu'on eût différentié l'équation proposée (1) par rapport à y , on aurait obtenu une autre équation qui peut s'écrire

$$(7) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dx}{dy} \right) \frac{ds}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} + N_1 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mais, si l'on ajoute les équations (6) et (7) et si l'on tient compte de l'équation (3), on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{ds}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} + N + N_1 \frac{dy}{dx} = 0,$$

ce qui n'est autre que l'équation proposée différentiée le long de la caractéristique.

L'équation (7) n'est donc pas nouvelle, car c'est une conséquence de la proposée et de l'équation (6). Il est préférable de remplacer l'équation (7) par la proposée, puisque celle-ci se trouve tout intégrée par rapport aux fonctions inconnues.

31. Les équations des caractéristiques contiennent ici sept fonctions inconnues de x , savoir y, z, p, q, r, s, t , qui doivent satisfaire à la proposée, aux équations (3) et (6) et, en outre, aux suivantes

$$\frac{dz}{dx} = p + q \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = r + s \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} = s + t \frac{dy}{dx}.$$

Il n'existe donc que six équations pour déterminer sept fonctions inconnues, de sorte que l'une de ces dernières reste encore arbitraire. L'indétermination est la même que dans le cas des équations linéaires.

32. La théorie des caractéristiques s'étend sans difficulté aux équations d'ordre n . Il existe deux équations spéciales à ces courbes et qui sont ana-

logues aux équations (3) et (6) : il faut y joindre l'équation proposée et celles que l'on obtient en différentiant, le long de la courbe, les dérivées des $n - 1$ premiers ordres. Le nombre des équations obtenues est ainsi égal à

$$3 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mais elles renferment comme fonctions inconnues de x d'abord y et z , puis les dérivées jusqu'à l'ordre n , de sorte que le nombre des fonctions inconnues est égal à

$$1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Le nombre des fonctions inconnues surpasse celui des équations de

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1 - \frac{n(n+1)}{2} - 3 = n - 1.$$

L'indétermination est la même que si l'équation proposée était linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé. On peut se donner arbitrairement $n - 1$ des fonctions inconnues. Ce n'est que dans le premier ordre que la détermination des fonctions est complète.

On voit aussi que les caractéristiques doivent être regardées comme les génératrices naturelles des surfaces intégrales. En effet, quand la caractéristique se déforme et se déplace de manière à engendrer une surface, il est permis, en passant d'une caractéristique à la suivante, de passer de la surface considérée à une autre surface intégrale infiniment voisine. Cela permet de considérer comme une surface intégrale unique deux surfaces qui, suivant la ligne d'intersection, ont toutes leurs dérivées égales jusqu'à l'ordre n .

IV. — APPLICATION AUX ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

33. Afin de préciser les théories générales développées plus haut, on va en faire l'application aux équations du premier ordre pour lesquelles

les caractéristiques sont entièrement déterminées; car le nombre des équations est alors égal à celui des fonctions inconnues.

Soit d'abord l'équation linéaire du premier ordre.

$$Pp + Qq = R,$$

où P , Q et R désignent des fonctions de x , y , z .

Les deux équations spéciales aux caractéristiques sont

$$P \frac{dy}{dx} - Q = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P};$$

et l'on obtient, par suite, pour les équations différentielles de ces courbes,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

constituant le système corrélatif bien connu.

En remontant à la définition qui a été donnée de ces courbes, il est visible que les caractéristiques des équations linéaires du premier ordre sont les courbes suivant lesquelles se coupent les surfaces intégrales.

On peut encore les définir comme les courbes appartenant aux surfaces intégrales, et tout le long desquelles le plan tangent peut éprouver une discontinuité.

Lorsque les intégrales du système corrélatif peuvent être obtenues, elles sont de la forme

$$\alpha = \varphi(x, y, z), \quad \beta = \psi(x, y, z),$$

α et β désignant deux constantes arbitraires. Il suffit d'établir entre α et β une relation pour que la caractéristique se déplace suivant une loi donnée et engendre une surface intégrale. L'intégrale générale est donc

$$\alpha = \Phi(\beta),$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

34. Considérant maintenant une équation non linéaire du premier ordre

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

on posera, pour simplifier les écritures,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q.$$

Les deux équations spéciales aux caractéristiques sont ici

$$P \frac{dy}{dx} - Q = 0,$$

$$P \frac{dp}{dx} + \left(Q - P \frac{dy}{dx} \right) \frac{dq}{dx} + Zp + X = 0$$

ou

$$(2) \quad P \frac{dy}{dx} - Q = 0,$$

$$(3) \quad P \frac{dp}{dx} + Zp + X = 0,$$

auxquelles il faut joindre l'équation proposée et la suivante

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} = p + q \frac{dy}{dx}.$$

Pour plus de symétrie, l'équation proposée peut être remplacée par la suivante

$$(5) \quad Q \frac{dq}{dx} + Zq + Y = 0,$$

qui s'obtient en combinant l'équation (3) avec la proposée différenciée le long de la caractéristique. Mais il faut remarquer qu'en agissant ainsi, on augmente la généralité du problème; car les équations (2), (3), (4) et (5) resteraient les mêmes, le deuxième membre de l'équation (1) étant remplacé par une constante arbitraire.

Les équations (2), (3), (4) et (5) définissent les quatre fonctions $y, z,$

p et q de x ; elles peuvent être mises sous la forme

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-X - Zp} = \frac{dq}{-Y - Zq}$$

et constituent le système corrélatif.

Il suffit d'en obtenir trois intégrales pour que l'on puisse, en y joignant la proposée, déterminer les quatre fonctions y, z, p, q , qui se trouveront ainsi exprimées au moyen de x et de trois constantes arbitraires sous la forme

$$(6) \quad \begin{cases} y = f_1(x, \alpha, \beta, \gamma), \\ z = f_2(x, \alpha, \beta, \gamma), \\ p = f_3(x, \alpha, \beta, \gamma), \\ q = f_4(x, \alpha, \beta, \gamma). \end{cases}$$

33. On ne s'arrêtera pas à montrer ici comment on déduit de ces équations l'*intégrale complète* de la proposée qui contient, comme on sait, deux constantes arbitraires, ni comment on forme l'intégrale générale qui n'est autre que l'enveloppe de la surface définie par l'intégrale complète, quand on établit une relation arbitraire entre les deux constantes que renferme cette intégrale.

Il suffira de montrer comment se déplacent les caractéristiques dans la génération des surfaces intégrales.

On peut remarquer tout d'abord que, par un point donné de l'espace, il passe une infinité de caractéristiques; car les deux premières équations (6) renferment trois constantes arbitraires. Ces caractéristiques, passant par un même point, constituent, d'ailleurs, une surface ayant un point conique en ce point; il sera démontré plus loin que cette surface est une intégrale.

Les équations du premier ordre non linéaires se distinguent ainsi nettement des équations linéaires; car, pour ces dernières, il ne passe, en général, qu'une caractéristique par un point donné de l'espace.

Pour étudier la génération des surfaces intégrales par le moyen des ca-

ractéristiques, on cherchera la condition pour que deux caractéristiques infiniment voisines appartiennent à la même surface intégrale.

Soient α, β, γ les constantes qui correspondent à la première caractéristique; pour celle qui est infiniment voisine, elles auront les valeurs $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$. La relation

$$dz = p dx + q dy$$

doit être satisfaite quand on passe du point (x, y, z) de la première courbe au point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ de la deuxième. Or

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma,$$

et la condition devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma \\ &= p dx + q \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma \right). \end{aligned}$$

Le coefficient de dx s'annule, car il est égal à $\frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial y}{\partial x}$, les dérivées étant prises le long de la première caractéristique. Il reste donc

$$(7) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - q \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} - q \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) d\beta + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma} - q \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) d\gamma = 0.$$

Telle est la condition cherchée. Elle doit être indépendante de x , de sorte que cette variable ne peut entrer que dans un facteur commun. C'est ce qu'on vérifie de la manière suivante :

Les valeurs (6) de y, z, p, q rendent identique l'équation proposée aussi bien que le système corrélatif. Or l'équation proposée, différenciée par rapport à α , donne

$$Y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z \frac{\partial z}{\partial \alpha} + P \frac{\partial p}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial q}{\partial \alpha} = 0;$$

du reste, on tire du système corrélatif

$$Y = -Zq - P \frac{\partial q}{\partial x}, \quad Q = P \frac{\partial y}{\partial x};$$

par suite,

$$Z \left(\frac{\partial z}{\partial x} - q \frac{\partial y}{\partial x} \right) + P \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0.$$

Mais l'équation $p = \frac{\partial z}{\partial x} - q \frac{\partial y}{\partial x}$ donne

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} - q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x},$$

et l'équation précédente devient

$$Z \left(\frac{\partial z}{\partial x} - q \frac{\partial y}{\partial x} \right) + P \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} - q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0;$$

elle s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{\partial z}{\partial x} - q \frac{\partial y}{\partial x} = A e^{-\int \frac{Z}{P} dx},$$

A étant indépendant de x , et, par conséquent, fonction de α , β , γ seulement. On trouverait des expressions analogues pour les coefficients de $d\beta$ et $d\gamma$ dans l'équation (7), qui peut donc s'écrire

$$e^{-\int \frac{Z}{P} dx} (A d\alpha + B d\beta + C d\gamma) = 0.$$

La variable x n'entre que dans le facteur commun qui sera généralement différent de zéro, et la condition cherchée se réduit à

$$(8) \quad A d\alpha + B d\beta + C d\gamma = 0.$$

Il ne s'agit pas ici de discuter les cas d'exception qui pourraient se présenter. On se bornera aux remarques suivantes :

Si l'on établit entre les constantes α , β , γ une relation arbitraire, on pourra éliminer une de ces constantes; l'équation précédente deviendra intégrable et fournira, par suite, une autre relation finie entre les con-

stantes. Dès lors α , β et γ pourront être éliminées entre ces deux relations et les deux premières équations (6). On obtiendra ainsi l'équation d'une surface intégrale.

On peut, par exemple, exprimer que cette surface contient une courbe donnée. La première relation entre α , β , γ sera obtenue en exprimant que les courbes définies par les deux premières équations (6) rencontrent la courbe donnée.

Il est facile de vérifier que l'équation (7), ou son équivalente (8), exprime la condition nécessaire et suffisante pour que deux caractéristiques infiniment voisines se rencontrent, de sorte que, quand deux caractéristiques infiniment voisines se rencontrent, elles appartiennent à la même surface intégrale. Il en résulte que toutes les caractéristiques d'une même surface ont une enveloppe qui constitue son *arête de rebroussement*.

On voit également que toutes les caractéristiques qui passent par un même point engendrent l'une des surfaces intégrales. Dans ce cas, l'arête de rebroussement se réduit à ce point.

V. — SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE.

36. Pour les équations du deuxième ordre, on se bornera à signaler une propriété curieuse de celles qui sont absolument linéaires; cette propriété présente quelque intérêt au point de vue de leur application à la Physique mathématique.

Si φ et ψ désignent deux fonctions de x , y , z , p , q , l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

où l'on considère, pour les différentiations, z , p , q comme fonctions de x et y , est une équation du deuxième ordre, linéaire en r , s , t .

Une intégrale z de cette équation étant donnée, il existe une fonction u de x et y , telle que

$$du = \psi dx + \varphi dy,$$

car l'équation proposée n'est autre que la condition d'intégrabilité de la précédente. La fonction u est déterminée, sauf une constante arbitraire; elle est continue tant que φ et ψ restent finis, et il est clair que les fonctions z et u sont complètement liées l'une à l'autre.

Considérant deux intégrales z_1 et z_2 de la proposée, les surfaces représentatives se coupent suivant une courbe dont la projection horizontale a pour équation $z_1 - z_2 = 0$. On peut se demander si une surface dont l'ordonnée serait représentée d'un côté de la courbe d'intersection par z_1 , de l'autre côté par z_2 , ne pourrait pas, à certains égards, être regardée comme constituant une surface intégrale unique. La fonction correspondante, que l'on désignera par (z_1, z_2) , serait continue; mais ses dérivées éprouveraient une discontinuité le long de la courbe d'intersection.

Or, toute intégrale z définissant une fonction continue u , il faut, pour que (z_1, z_2) puisse être regardée comme une intégrale, que la fonction u qu'elle définit soit continue le long de l'intersection; car les fonctions φ et ψ varient brusquement le long de l'intersection, mais ne deviennent généralement pas infinies.

Aux intégrales z_1 et z_2 correspondent deux fonctions u_1 et u_2 ; on peut disposer des constantes arbitraires que renferment ces dernières, de manière à rendre égales u_1 et u_2 en un point de l'intersection.

Il en sera de même en tous les autres points si, quand on se déplace le long de la courbe, du_1 et du_2 sont égaux. Il faut évidemment, pour qu'il en soit ainsi, que

$$(2) \quad (\psi_1 - \psi_2) dx + (\varphi_1 - \varphi_2) dy = 0.$$

Mais l'équation $u_1 - u_2 = 0$ différenciée le long de la courbe donne

$$(3) \quad (p_1 - p_2) dx + (q_1 - q_2) dy = 0.$$

Les équations précédentes doivent avoir lieu en même temps et doivent fournir des valeurs égales pour $\frac{dy}{dx}$.

37. Les intégrales que l'on peut associer de cette manière pour en constituer une nouvelle ne sont donc pas quelconques. Les courbes d'in-

tersection seraient intéressantes à étudier, car elles peuvent être regardées comme une généralisation des caractéristiques. Il est facile de voir, en effet, que si p_2 et q_2 convergent respectivement vers p_1 et q_1 , les courbes d'intersection tendent à se confondre avec les caractéristiques telles qu'elles ont été définies précédemment.

Mais, quand l'équation (1) est absolument linéaire ou, plus généralement, quand les coefficients des dérivées du second ordre sont uniquement fonction de x, y, z , la courbe d'intersection est précisément une caractéristique commune aux deux surfaces.

Soient, en effet,

$$\varphi = ap + bq + c, \quad \psi = a'p + b'q + c',$$

les fonctions a, b, c, a', b', c' dépendant uniquement de x, y et z , l'équation (2) devient

$$(4) \quad [a'(p_1 - p_2) + b'(q_1 - q_2)]dx + [a(p_1 - p_2) + b(q_1 - q_2)]dy = 0.$$

Les équations (3) et (4), qui doivent avoir lieu en même temps, sont homogènes par rapport aux différences $p_1 - p_2, q_1 - q_2$. Si donc ces différences ne sont pas constamment nulles le long de l'intersection, il faut que le déterminant s'annule, ce qui donne la condition

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (b - a')\frac{dy}{dx} - b' = 0;$$

on vérifie sans difficulté que cette équation se confond avec celle des caractéristiques.

Ainsi, dans le cas particulier que l'on vient d'examiner, deux surfaces intégrales qui se coupent, suivant une caractéristique commune, peuvent être associées de manière à constituer une intégrale unique.

38. Les résultats que l'on vient d'obtenir tiennent essentiellement à la forme particulière de l'équation proposée. Mais, quand il s'agit d'une équation absolument linéaire, on se trouve en présence d'une propriété générale dépendant de la nature de l'équation et nullement de la forme particulière sous laquelle elle est présentée.

C'est ce qui résulte du théorème suivant, démontré par M. R. Liouville.

Étant donnée une équation linéaire du second ordre

$$Hr + 2Ks + Lt + Pp + Qq + Zz + R = 0,$$

il existe une infinité de facteurs μ , fonctions de x et y , tels qu'en multipliant par μ le premier membre de l'équation, celle-ci prenne la forme

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

les fonctions φ et ψ étant de la forme

$$\varphi = ap + bq + cz + h, \quad \psi = a'p + b'q + c'z + h'.$$

La démonstration s'effectue en identifiant le premier membre de la proposée, multiplié par μ , avec le premier membre de (1). On obtient ainsi sept équations entre lesquelles il est possible d'éliminer les huit fonctions $a, b, c, h, a', b', c', h'$ de x et y , ce qui conduit à l'équation suivante

$$\frac{\partial^2(\mu H)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(\mu K)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(\mu L)}{\partial y^2} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} + \mu Z = 0,$$

qui est aux dérivées partielles du second ordre en μ et possède les mêmes caractéristiques que la proposée.

On démontre ensuite aisément que toute intégrale de l'équation en μ possède la propriété cherchée.

La multiplication d'une équation aux dérivées partielles par un facteur fonction de x et y ne lui fait évidemment subir aucune altération : on peut donc dire que deux intégrales d'une équation du second ordre absolument linéaire peuvent être associées de manière à constituer une intégrale unique quand elles se coupent suivant une caractéristique commune.

CHAPITRE II.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — PROPRIÉTÉS DES GAZ PARFAITS.

39. Ce Mémoire ayant principalement pour objet l'étude du mouvement des gaz parfaits, il est utile de rappeler d'abord quelques-unes des propriétés de ces corps.

Il existe, entre le volume spécifique ν , la pression extérieure p et la température absolue T d'un corps déterminé, une relation de la forme

$$f(\nu, p, T) = 0,$$

qui porte le nom d'*équation caractéristique*. Pour les gaz parfaits, l'équation caractéristique est

$$p\nu = RT,$$

R désignant une constante dont la valeur dépend de la nature du gaz. Cette relation n'est autre que la traduction des lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

En outre, pour les gaz parfaits, la chaleur spécifique à pression constante C et la chaleur spécifique à volume constant c sont indépendantes de la température et de la pression : le rapport $\frac{C}{c} = m$ doit donc être également regardé comme une constante. Sa valeur est toujours supérieure à l'unité.

40. *Détente adiabatique.* — Quand un gaz se détend avec une extrême lenteur, de manière que ses particules ne possèdent jamais qu'une vitesse négligeable, le travail extérieur produit est représenté par

$\int p dv$. Cette intégrale ne peut d'ailleurs être évaluée que si l'on joint à l'équation caractéristique une deuxième relation entre le volume spécifique, la pression et la température.

Si l'on suppose, en particulier, les parois de l'enveloppe imperméables à la chaleur, la détente est dite *adiabatique*, et il existe entre la pression et le volume spécifique la relation suivante

$$pv^m = \text{const.}$$

Soient p_0 et v_0 la pression et le volume spécifique à un instant déterminé, pris pour instant initial,

$$pv^m = p_0 v_0^m;$$

le travail extérieur produit depuis l'instant initial est

$$\int_{v_0}^v p_0 v_0^m \frac{dv}{v^m} = \frac{1}{m-1} p_0 v_0^m \left(\frac{1}{v_0^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}} \right).$$

41. Énergie interne. — Lorsque, dans l'expression précédente, le volume v augmente indéfiniment, le travail extérieur produit converge vers la limite

$$\frac{p_0 v_0}{m-1}.$$

Cette expression est relative à l'unité de poids du gaz; mais elle peut être étendue à une masse gazeuse quelconque, à condition de prendre pour v_0 non le volume spécifique, mais le volume total de la masse.

Ainsi donc, si p désigne la pression et v le volume d'une masse gazeuse, le travail extérieur qu'elle développe dans une détente indéfinie se produisant avec une extrême lenteur, et sans addition ni soustraction de chaleur, a pour expression $\frac{pv}{m-1}$. C'est la portion d'énergie interne qui pourrait être utilisée à la production du travail extérieur, sans modification dans la constitution du gaz, si toutefois l'équation caractéristique et la constance des chaleurs spécifiques se vérifiaient jusqu'au zéro absolu de température, dont le gaz se rapproche de plus en plus dans une détente adiabatique indéfinie.

Dans ce qui va suivre, la quantité $\frac{p\nu}{m-1}$ sera désignée simplement sous le nom d'*énergie interne*, faisant ainsi abstraction de la portion de cette énergie qui ne pourrait être utilisée sans modification dans la constitution du gaz.

42. Énergie totale. — Lorsque la détente ne s'effectue pas avec une extrême lenteur, les particules du gaz acquièrent des vitesses sensibles. La force vive qui correspond à ces vitesses peut être prise en partie aux dépens de l'énergie interne, si l'on suppose encore qu'il n'y ait ni addition ni soustraction de chaleur.

On admettra, conformément au principe de l'équivalence, que, dans la transformation subie par un élément de volume du gaz, la diminution d'énergie interne correspond exactement à la force vive acquise par l'élément et au travail extérieur produit.

Pour abréger le langage, on désignera parfois sous le nom d'*énergie totale* la somme de la force vive correspondant au mouvement sensible et de l'énergie interne $\frac{p\nu}{m-1}$. On peut alors énoncer le principe suivant :

Dans la transformation élémentaire d'un élément de masse du gaz qui s'effectue sans addition ni soustraction de chaleur, la diminution d'énergie totale est égale au travail extérieur produit.

II. — MOUVEMENT D'UN CORPS CYLINDRIQUE S'EFFECTUANT PAR TRANCHES PARALLÈLES.

43. On considère un corps cylindrique renfermé dans une enveloppe de même forme supposée assez résistante pour subir sans déformation appréciable toutes les variations de pression du corps qu'elle renferme. Quand il s'agit d'un solide, l'enveloppe peut être supprimée, attendu que les variations de section sont très faibles.

On dit que le mouvement d'un semblable corps s'effectue *par tranches parallèles* quand toutes les molécules situées dans une même section nor-

male aux génératrices possèdent, à un instant donné, des vitesses parallèles à ces génératrices et égales entre elles. Les mouvements de cette espèce sont les seuls qui seront étudiés ici, et l'on admettra qu'ils sont toujours possibles, bien que, dans certains cas, la présence de l'enveloppe doive avoir pour effet de retarder la vitesse des molécules qui la touchent. On négligera donc le frottement du corps contre l'enveloppe ou, si l'on en tient compte, on admettra que son effet sur le mouvement d'une tranche est le même que si ce frottement était remplacé par une force uniformément répartie sur la base de la tranche.

Les différentes sections du corps, normales aux génératrices, seront désignées par leurs abscisses comptées à partir d'une origine arbitraire et parallèlement aux génératrices, ces abscisses étant prises à un instant déterminé, regardé comme instant initial.

Soit u le déplacement subi par la section x à l'instant t : la fonction u dépend des deux variables x et t et le problème consiste à la déterminer.

Considérant la tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$, les deux bases de la tranche ont subi à l'instant t des déplacements respectivement égaux à u et à $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. La longueur de la tranche, primitivement égale à dx , est ainsi devenue $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, de sorte que son allongement, rapporté à l'unité de longueur, a pour valeur $\frac{\partial u}{\partial x}$.

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ représente ainsi la *dilatation linéaire* du corps ; quant à la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial t}$, il est évident qu'elle représente la vitesse.

44. L'application du théorème des quantités de mouvement fournit aisément une équation à laquelle satisfait la fonction u .

Considérant la tranche comprise entre les sections x et $x + dx$, la vitesse de la section x , égale à $\frac{\partial u}{\partial t}$ à l'instant t , est devenue, à l'instant $t + dt$, égale à $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt$ et, par suite, a subi l'accroissement $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt$. Cet accroissement est le même pour tous les points de la tranche si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, et la variation de la quantité

de mouvement de la tranche est

$$\rho_0 \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dt, \quad (d(MV))$$

ω représentant la section du corps et ρ_0 la densité correspondant à la section x pour l'instant initial.

Il faut égaler à la quantité précédente le produit par dt de la projection sur l'axe des x des forces appliquées à la tranche. Les forces extérieures peuvent être représentées par $\omega R dx$, et l'on peut y comprendre le frottement provenant de l'enveloppe ou de la viscosité. La quantité R dépend en général de l'abscisse x , de la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$, de la dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de la pression p qui s'exerce dans la tranche.

Puisqu'il a été tenu compte du frottement, les pressions exercées par l'enveloppe sont normales à l'axe des x : il suffit donc de tenir compte des pressions exercées sur les bases. Celles-ci sont respectivement égales à ωp et à $-\omega \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right)$. L'équation fournie par le théorème des quantités de mouvement est ainsi, après la suppression des facteurs communs,

$$(1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Mais, en outre de la fonction u , elle renferme une autre fonction inconnue p de x et de t , laquelle dépend de la nature du corps.

43. Dans certains cas, la fonction p est donnée à l'avance, et exprimée en fonction de x et de $\frac{\partial u}{\partial x}$. Si l'on suppose, d'une manière générale, que p soit une fonction connue de a , t , u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$, l'équation précédente est aux dérivées partielles du second ordre en u ; l'équation est d'ailleurs linéaire par rapport aux dérivées du second ordre.

Lorsque le terme R est nul et la densité initiale ρ_0 constante, que de plus p dépend uniquement de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$, l'équation aux dérivées partielles est de la forme

$$H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2K \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + I \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

les coefficients H , K , L dépendant uniquement de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial t}$. On montrera plus loin qu'il est alors toujours possible de trouver une intégrale renfermant une fonction arbitraire et présentant une importance toute particulière.

Quand le corps considéré est un solide élastique, la pression est proportionnelle à la dilatation et égale à $-E \frac{\partial u}{\partial x}$, E désignant le *coefficient d'élasticité*. L'équation (1) du numéro précédent devient alors

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{dE}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Lorsque le solide est homogène, ρ_0 et E sont des constantes et l'on retrouve l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

laquelle s'applique également au mouvement des liquides.

46. Revenant maintenant aux gaz parfaits, il s'agit de trouver une deuxième équation qui, jointe à l'équation (1), suffise pour déterminer les deux fonctions u et p de x et de t . On exprimera à cet effet que, pendant le temps dt , la diminution de l'énergie totale de la tranche est égale au travail extérieur produit par la tranche, ou que l'accroissement de cette énergie est égal au travail des forces extérieures.

Or le volume de la tranche à l'instant t est $\omega dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ et sa masse a pour valeur $\rho_0 \omega dx$: l'énergie totale est donc

$$\frac{\rho_0 \omega dx}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{p \omega dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{m-1}.$$

La variation de cette énergie totale pendant le temps dt s'obtient en différentiant l'expression précédente par rapport à t . Reste à calculer le travail extérieur.

Le travail de la force $\omega R dx$ est évidemment

$$\omega R dx \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

car le déplacement de son point d'application est $\frac{\partial u}{\partial t} dt$. Le travail des pressions normales dues à l'enveloppe est nul. Le travail de la pression ωp qui s'exerce sur la tranche x est $\omega p \frac{\partial u}{\partial t} dt$, celui de la pression

$$\omega \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx dt \right)$$

qui s'exerce sur la tranche $x + dx$ est égal au précédent changé de signe et augmenté de sa différentielle prise par rapport à x , c'est-à-dire à

$$- \omega p \frac{\partial u}{\partial t} dt - \omega \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \omega p \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx dt. \quad \left[- \omega \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 dt \approx 0. \right]$$

On obtient ainsi, en supprimant le facteur commun $\omega dx dt$, l'équation suivante

$$(2) \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\frac{\partial p}{\partial t} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{m-1} + \frac{p \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}}{m-1} - R \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + p \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0,$$

qui, en tenant compte de l'équation (1), se réduit à

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + mp \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0. \quad \left(\frac{m-1}{2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{m-1} \right] + p \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\}$$

L'équation (2) se sépare ainsi en deux parties : l'équation (1) et l'équation (3), et ce fait donne lieu à une interprétation.

Si l'on multiplie l'équation (1) par $\omega \frac{\partial u}{\partial t} dx dt$, elle devient

$$\rho_0 \omega \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dt = \omega R \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \omega \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt.$$

Le premier membre est la variation de la force vive de la tranche; le premier terme du second membre, le travail de la force extérieure $\omega R dx$ pendant le temps dt ; enfin le dernier terme est le travail de la différence

des pressions sur les deux bases correspondant au déplacement $\frac{\partial u}{\partial t} dt$ de la tranche. Cette équation s'obtient évidemment en assimilant la tranche à un solide invariable.

Quant à l'équation (3), elle exprime, ainsi qu'on le reconnaîtrait sans peine, que la variation d'énergie interne est égale au travail extérieur produit par la dilatation de la tranche, comme si la détente avait lieu sans que les molécules pussent acquérir de vitesse sensible.

47. L'équation (3) peut être mise sous la forme

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{p} = -m \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}};$$

elle s'intègre immédiatement et donne

$$(4) \quad p = f(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m},$$

$f(x)$ désignant une fonction arbitraire qui doit être déterminée par les conditions initiales.

On aurait pu poser immédiatement l'équation (4) en exprimant que, dans chaque tranche, la pression varie comme dans la détente adiabatique, lorsque les molécules n'acquiescent aucune vitesse sensible. Mais cette proposition, que l'on admet d'ordinaire sans discussion, est bien loin d'être évidente. Elle cesse même d'être exacte quand une discontinuité se produit dans la loi de variation des vitesses ou des dilatations des tranches. Dans ce cas particulier, l'analyse précédente devient illusoire, ainsi qu'or le démontrera plus loin.

48. L'élimination de p entre les équations (1) et (4) donne

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R + m f(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f'(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m}.$$

Dans un grand nombre de cas, on peut négliger les forces extérieures,

ainsi que les effets produits par le frottement et la viscosité, de sorte que R s'annule. On peut toujours alors faire disparaître de l'équation le terme indépendant des dérivées du second ordre.

Mettant, en effet, l'équation sous la forme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m} \right],$$

on posera

$$u_1 = x + u, \quad x' = \varphi(x),$$

ce qui donne

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = - \varphi'(x) \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ f(x) [\varphi'(x)]^{-m} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x'} \right)^{-m} \right\}.$$

Déterminant la fonction φ de manière que le produit $f(x) [\varphi'(x)]^{-m}$ soit constant, on aura

$$f(x) [\varphi'(x)]^{-m} = A, \quad \varphi'(x) = \left[\frac{f(x)}{A} \right]^{\frac{1}{m}},$$

et l'équation deviendra

$$\rho_0 \left[\frac{f(x)}{A} \right]^{-\frac{1}{m}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x'} \left[A \left(\frac{\partial u_1}{\partial x'} \right)^{-m} \right].$$

Le facteur $\rho_0 \left[\frac{f(x)}{A} \right]^{-\frac{1}{m}}$ peut être exprimé en fonction de x' . En le désignant par $\psi(x')$ et posant $u' = u_1 - x'$, l'équation devient enfin

$$\psi(x') \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = m A \left(1 + \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}.$$

Le terme indépendant des dérivées du second ordre a disparu.

La transformation précédente revient à changer l'état initial auquel on rapporte tous les autres. Il reste à calculer la pression et la densité correspondant à ce nouvel état initial. Or la longueur d'une tranche, égale à dx dans le premier état initial, est devenue dx' dans le deuxième. Si donc ρ'_0 désigne la nouvelle densité initiale et $F(x')$ la nouvelle pression

initiale,

$$\rho'_0 dx' = \rho_0 dx, \quad F(x') (dx')^m = f(x) dx^m.$$

Mais $dx' = \varphi'(x) dx$; on voit ainsi que $F(x)$ est égale à la constante A .
De plus

$$\rho'_0 = \frac{\rho_0}{\varphi'(x)} = \rho_0 \left[\frac{f(x)}{A} \right]^{-\frac{1}{m}} = \psi(x').$$

Ainsi, dans le nouvel état initial, la pression est constante à l'intérieur du gaz; mais il n'en est pas de même de la densité, vu que ρ'_0 est généralement fonction de x' . La température absolue T est inversement proportionnelle à la densité ρ'_0 , puisque la pression est constante; cette température varie donc d'un point à l'autre et, bien que dans le nouvel état initial la pression soit constante, le gaz ne pourrait s'y trouver en équilibre que si sa conductibilité propre était rigoureusement nulle.

Pour que, dans cet état, la densité et la température fussent constantes, il faudrait que le produit $\rho_0 [f(x)]^{-\frac{1}{m}}$ fût lui-même constant.

49. Il résulte de ce qui précède que le mouvement d'un gaz parfait renfermé dans un tuyau cylindrique satisfait toujours, si l'on néglige les forces extérieures, les frottements et la viscosité, à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(5) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

p_0 étant une constante arbitraire, et ρ_0 une fonction de x définie de la manière suivante. Considérant un état déterminé du gaz, on modifie la dilatation des diverses tranches, de manière que la pression dans chacune d'elles devienne constante et égale à p_0 . Dans cette modification, supposée effectuée sans discontinuité, la pression d'une tranche est toujours liée à son volume par la loi adiabatique. La fonction ρ_0 est alors celle qui représente, après la modification, la densité d'une tranche en fonction de son abscisse x . Chaque tranche est désignée par l'abscisse correspondant à l'état qui vient d'être défini; la fonction u est le déplacement de la

tranche x à l'instant t , de sorte que l'abscisse de cette tranche est, à cet instant, devenue égale à $x + u$.

L'équation (5) cesserait de représenter le mouvement du gaz si une discontinuité venait, à un instant déterminé, s'introduire dans les vitesses ou les dilatations.

30. Il n'a été question jusqu'à présent que des gaz parfaits, mais les résultats précédents peuvent être généralisés et étendus à tous les corps dont la conductibilité propre est négligeable.

Considérant, en effet, un corps quelconque : soit

$$f(v, p, T) = 0$$

son équation caractéristique. Représentant par dQ la quantité de chaleur absorbée par l'unité de poids des corps dans une transformation élémentaire où le volume augmente de dv et la pression de dp , sans que les particules du corps acquièrent de vitesse sensible,

$$dQ = h dv + k dp,$$

h et k étant des fonctions de v , p et T qui peuvent être exprimées en fonction de v et p seulement, grâce à l'équation caractéristique. Si dQ est égal à zéro, la transformation est adiabatique, et l'on obtient une équation différentielle dont l'intégration fournit entre la pression p et le volume spécifique v , une relation de la forme

$$\varphi(p, v) = \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire dont la valeur dépend de l'état initial, $\alpha = \varphi(p_0, v_0)$.

L'équation précédente peut être résolue par rapport à p et mise sous la forme

$$p = F'(v, \alpha),$$

F désignant la dérivée, par rapport à v , d'une certaine fonction de v et α .

Dans une transformation adiabatique quelconque, la valeur de α reste constante.

Le travail extérieur produit dans une transformation élémentaire est égal à $p dv$. S'il s'agit d'une transformation adiabatique finie, dans laquelle le volume passe de v_0 à v , le travail extérieur produit est

$$\int_{v_0}^v F'(\nu, \alpha) d\nu = F(\nu, \alpha) - F(\nu_0, \alpha),$$

puisque α reste constant pendant la transformation.

Quand le volume ν augmente indéfiniment, la quantité $F(\nu, \alpha)$ converge vers une limite finie; car, s'il en était autrement, l'unité de poids d'un corps produirait, par sa détente, un travail infini, sans addition de chaleur. Soit $\Phi(\alpha)$ cette limite, il est clair que l'expression

$$\Phi(\alpha) - F(\nu, \alpha)$$

représente le travail extérieur qu'un corps dont le volume spécifique est ν et la pression $p = F'(\nu, \alpha)$ est capable de produire dans une détente indéfinie.

Par analogie avec ce qui a été fait pour les gaz parfaits, on donnera à cette quantité le nom d'*énergie interne*. L'énergie interne d'un corps de poids ϖ et de volume V est, par suite,

$$\varpi \left[\Phi(\alpha) - F\left(\frac{V}{\varpi}, \alpha\right) \right].$$

Enfin on désignera sous le nom d'*énergie totale* d'un élément de masse la somme de sa force vive et de son énergie interne et, en vertu du principe de l'équivalence, on admettra que, dans la transformation d'un élément de masse effectuée sans addition ni soustraction de chaleur, la diminution de l'énergie totale est égale au travail extérieur produit.

31. Considérant maintenant un corps cylindrique dont le mouvement s'effectue par tranches parallèles, l'application du théorème des quantités

de mouvement fournira, comme précédemment, l'équation

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

D'autre part, la conductibilité propre du corps étant supposée négligeable, ainsi que la conductibilité de l'enveloppe, on peut exprimer que l'accroissement de l'énergie totale d'une tranche comprise entre les sections x et $x + dx$ est égale au travail produit par les forces extérieures.

Le volume de la tranche est $\omega dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, sa masse est $\rho_0 \omega dx$, et son poids $\rho_0 g \omega dx$, g désignant la gravité. L'énergie totale est donc

$$\frac{\rho_0 \omega dx}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \rho_0 g \omega dx \left[\Phi(\alpha) - F\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right) \right],$$

la quantité α étant d'ailleurs liée à la pression p par la relation

$$p = F'\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right).$$

Prenant par rapport à t la différentielle de l'expression précédente, et égalant au travail des forces extérieures pendant l'instant dt , travail qui a été calculé quand il a été question des gaz parfaits, on obtient une équation qui, en tenant compte de celle des quantités de mouvement, se réduit, après suppression des facteurs communs, à

$$\left[p - F'\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho_0 g \left[\Phi'(\alpha) - \frac{\partial}{\partial x} F\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right) \right] \frac{dz}{dt} = 0.$$

Le premier terme de cette équation est nul, à cause de la relation qui existe entre p et α ; il faut qu'il en soit de même du second. Or la quantité entre parenthèses ne peut s'annuler, car autrement l'énergie interne serait indépendante de α et, par suite, de la pression. Donc $\frac{dz}{dt} = 0$ et la quantité α reste invariable pendant la transformation, de sorte que la relation entre le volume spécifique et la pression est la même que si la

transformation avait lieu sans que les molécules pussent acquérir de vitesse sensible.

Ce théorème, démontré d'abord uniquement pour les gaz parfaits, se trouve ainsi étendu aux autres corps; mais il est bien entendu qu'il cesserait d'être exact si la tranche considérée pouvait recevoir de la chaleur de l'extérieur ou si la vitesse de la tranche pouvait éprouver une variation finie dans un temps infiniment petit.

32. D'après ce qui précède, quand un corps dont la conductibilité propre est assez faible pour être négligée est renfermé dans une enveloppe cylindrique imperméable à la chaleur et qu'il est animé d'un mouvement par tranches, la pression p d'une tranche est liée, tant qu'il ne se produit pas de discontinuité dans les vitesses, à la dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ par une relation de la forme

$$p = F\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right),$$

dans laquelle la quantité α est indépendante du temps; mais α varie avec x ainsi que ρ_0 si la pression et la densité ne sont pas constantes dans tout le corps à l'instant initial. La pression p doit donc être regardée, en général, comme dépendant de x et de $\frac{\partial u}{\partial x}$, de sorte que l'on peut poser

$$p = \psi\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement est donc

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{d\psi}{dx} - R,$$

l'expression $\frac{d\psi}{dx}$ représentant une dérivée totale.

Quand, le corps étant homogène, la densité et la pression sont les mêmes dans tous les points pour l'instant initial, p dépend uniquement de $\frac{\partial u}{\partial x}$, et l'on a

$$p = - \varphi\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement devient alors, en supposant R égal à zéro,

$$(6) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi' \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

C'est l'équation (5) généralisée.

33. L'enveloppe a été jusqu'à présent regardée comme imperméable à la chaleur. Si l'on supposait, au contraire, que cette enveloppe agît, pendant le mouvement, comme une source de chaleur parfaite, de manière à maintenir constante la température du corps, la transformation de chaque tranche serait *isothermique* au lieu d'être adiabatique.

Dans le cas d'un gaz parfait, la relation entre le volume et la pression devient

$$p\nu = p_0\nu_0,$$

de sorte qu'il suffit de faire $m = 1$ dans l'équation générale (5) pour obtenir l'équation du mouvement. On trouve ainsi

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cette équation se rapproche plus de la vérité que l'équation (5) quand le gaz est renfermé dans un tuyau de diamètre très faible. Le cas de $m = 1$ présente d'ailleurs un certain intérêt relativement aux discontinuités qui peuvent se produire dans les vitesses.

III. — MOUVEMENT D'UN CORPS DE FORME CONIQUE.

34. D'une manière générale, le mouvement d'un corps est régi par une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes quand il existe un axe Ox tel que les molécules contenues dans un plan perpendiculaire à Ox possèdent, à un instant quelconque, des vitesses égales entre elles, et parallèles à cette droite. On se bornera à en donner quelques exemples.

Considérant d'abord un corps solide élastique dont la section ω perpendiculaire à Ox est variable avec x , la pression qui s'exerce sur une section x est ωp , celle qui s'exerce sur la section $x + dx$ est

$$\omega p + \frac{\partial}{\partial x}(\omega p) dx.$$

La masse de la tranche comprise entre les deux sections étant $\rho_0 \omega dx$, l'application du théorème des quantités de mouvement donne

$$\rho_0 \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x}(\omega p).$$

Le coefficient d'élasticité étant représenté par E , on a

$$p = - E \frac{\partial u}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\rho_0 \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d(\omega E)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Les termes affectés des dérivées du second ordre sont les mêmes que si le corps était cylindrique.

33. Comme deuxième exemple, on prendra un fluide, gaz ou liquide, renfermé dans une enveloppe dont la forme est celle d'un cône de révolution. L'axe du cône sera pris pour axe des x et le sommet pour origine des coordonnées. Soit β l'angle au sommet du cône. On se propose de rechercher l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement du fluide en supposant tous les points d'une tranche perpendiculaire à l'axe animés au même instant de vitesses égales entre elles et parallèles à cette droite. La conductibilité propre du fluide sera supposée nulle, ainsi que celle de l'enveloppe; en outre, afin de simplifier l'exposition, on négligera les frottements, la viscosité et les forces extérieures, qui ne peuvent d'ailleurs introduire dans l'équation que des termes indépendants des dérivées du second ordre.

Cela posé, la tranche dont les sections extrêmes avaient à l'instant

initial les coordonnées x et $x + dx$ avait alors pour volume

$$\pi x^2 \tan^2 \beta dx,$$

et sa masse est égale à $\pi \rho_0 x^2 \tan^2 \beta dx$.

A l'instant t l'abscisse x est devenue $x + u$, et le volume est

$$\pi(x + u)^2 \tan^2 \beta \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx.$$

La dilatation, rapportée à l'unité de volume est ainsi

$$\frac{u^2 + 2ux}{x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Pour appliquer le théorème des quantités de mouvement, on remarquera d'abord que l'accroissement de vitesse de tous les points de la tranche pendant le temps dt est, aux infiniment petits du second ordre près, égal à $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt$.

De plus, si l'on projette sur l'axe des x les pressions exercées tant sur les bases que sur la périphérie, il est visible que la somme des projections est égale à $-\pi(x + u)^2 \tan^2 \beta \frac{\partial p}{\partial x} dx$. On a donc l'équation

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - (x + u)^2 \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Il reste à calculer la fonction p .

36. Or, en partant de ce principe que la variation de l'énergie totale est égale au travail extérieur produit, on démontrerait, comme pour le mouvement dans un cylindre, que la pression est liée au volume spécifique ν comme si la détente avait lieu sans que les molécules acquièrent de vitesse sensible, de sorte que l'on a

$$p = F'(\nu, \alpha),$$

α désignant une fonction de x indépendante de t .

Le volume spécifique ν a pour valeur, à l'instant considéré,

$$\frac{(x+u)^2}{\rho_0 g x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Donc

$$p = F' \left[\frac{(x+u)^2}{\rho_0 g x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \alpha \right],$$

et cette valeur, substituée dans l'équation ci-dessus, la transforme en une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées du second ordre. Les termes qui dépendent des dérivées du second ordre sont

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(x+u)^4}{\rho_0 g x^2} F'' \left[\frac{(x+u)^2}{\rho_0 g x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \alpha \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si, le fluide étant homogène à l'instant initial, la pression et la densité sont constantes, α et ρ_0 sont indépendants de x ; on a

$$p = -\varphi \left[\left(\frac{x+u}{x} \right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right],$$

et les termes qui dépendent des dérivées du second ordre sont

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(x+u)^4}{x^2} \varphi' \left[\left(\frac{x+u}{x} \right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

37. Dans le cas particulier où le fluide considéré est un gaz parfait, la relation entre la pression et le volume spécifique est simplement

$$p\nu^m = p_0\nu_0^m,$$

de sorte qu'on obtient, pour la valeur de la pression,

$$p = p_0 \left[\frac{(x+u)^2}{x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]^{-m}$$

ou, si l'on pose $x+u = z$, z désignant alors l'abscisse de la tranche à l'instant t ,

$$p = p_0 z^{-2m} x^{2m} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-m}.$$

L'équation fournie par le théorème des quantités de mouvement devenant alors

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - z^2 \frac{\partial p}{\partial x},$$

on trouve, en substituant la valeur de p ,

$$(7) \quad \rho_0 x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - z^2 p_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[z^{-2m} x^{2m} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-m} \right].$$

C'est l'équation aux dérivées partielles cherchée. Les termes qui renferment les dérivées du second ordre sont

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - m p_0 z^{-2m+2} x^{2m} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

38. Quand le mouvement d'un fluide composé de couches sphériques homogènes et concentriques a lieu de telle manière que les divers points d'une même couche possèdent à chaque instant des vitesses égales entre elles et normales à la couche, il est bien clair que, si l'on isole, par la pensée, une portion du fluide contenue dans un cône de révolution infiniment délié et ayant son sommet au centre des couches sphériques, le mouvement du fluide contenu dans ce cône n'est autre que celui qui a été étudié dans les numéros précédents.

Inversement les équations obtenues pour le cône s'appliquent sans aucune modification au mouvement par couches sphériques concentriques; alors x désigne le rayon initial d'une couche et z le rayon de la même couche à l'instant t .

En particulier, l'équation (7) régit le mouvement d'un gaz parfait s'effectuant par couches sphériques concentriques.

CHAPITRE III.

THÉORIE DE LA PROPAGATION DU MOUVEMENT.

I. — OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

39. La théorie qui va être développée dans ce Chapitre ne s'applique qu'aux mouvements par tranches parallèles. Il a été démontré dans le Chapitre précédent que, pour les solides élastiques et les fluides non conducteurs, les mouvements de ce genre sont régis par des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes, linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre, du moins tant qu'il ne se produit pas de discontinuités dans les vitesses.

Chacune des intégrales de l'équation aux dérivées partielles représente, pour le corps considéré, un mouvement possible. Il faut entendre par là que, si la longueur du corps est infinie dans les deux sens et si le mouvement représenté par l'intégrale se trouve établi à un instant donné, il persistera indéfiniment.

Quand on parvient à obtenir l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles, on connaît, par cela même, tous les mouvements possibles. Mais, dans chaque problème particulier, il reste à déterminer, parmi toutes ces intégrales, celles qui conviennent à la question. Cette détermination présente des difficultés qui surpassent souvent celles que l'on rencontre dans la recherche de l'intégrale générale.

Ainsi l'équation du mouvement d'un solide cylindrique homogène et élastique est

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

quand il n'existe pas de forces extérieures. L'intégrale générale de cette

équation

$$u = \varphi\left(x + \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}t\right) + \psi\left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}t\right)$$

est connue depuis d'Alembert, et cependant on n'est parvenu que dans ces dernières années à résoudre complètement certains problèmes particuliers du mouvement des solides cylindriques élastiques. On peut citer, par exemple, le cas où un solide de ce genre est fixé à un bout et porte à l'autre une masse additionnelle que l'on assimile à un solide invariable et qui est supposée animée au début d'une certaine vitesse, tandis que le reste de la tige se trouve encore en repos. Ce problème avait été posé par Navier qui en avait donné une solution au moyen des séries trigonométriques, solution notoirement insuffisante, car elle n'indiquait aucune des circonstances du mouvement.

M. Phillips, dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* (année 1864), a montré le premier que l'on pouvait représenter le mouvement au moyen de l'intégrale générale de d'Alembert en y déterminant convenablement les fonctions arbitraires. Nous avons donné récemment, M. le colonel Sébert et moi, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (année 1882), des formules permettant de calculer par voie de récurrence les intégrales qui conviennent aux divers instants du mouvement. Plus récemment encore, la question a été traitée avec de grands détails par MM. de Saint-Venant, Flamant et Boussinesq dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et dans la Note de la traduction française de la *Théorie de l'élasticité* de Clebsch.

Ce n'est donc qu'au prix de longs efforts que ce problème, en apparence si simple, a pu être résolu d'une manière à peu près satisfaisante.

60. Le problème de la détermination des intégrales qui conviennent à un problème donné est posé d'ordinaire de la manière suivante.

Considérant une portion limitée d'un corps dont on connaît l'état initial, on impose aux deux extrémités des conditions exprimées par des équations et l'on demande de déterminer l'intégrale représentant le mouvement.

Cette manière de poser la question est des plus défectueuses et paraît être la cause des grandes difficultés que l'on rencontre dans ce genre de recherches.

En effet, l'état initial est ordinairement défini en donnant la position et la vitesse de tous les points, c'est-à-dire que l'on donne, pour $t = 0$, les deux relations

$$(1) \quad u = f_1(x), \quad \frac{du}{dt} = f_2(x).$$

Soient de plus x_1 et x_2 les abscisses des deux tranches extrêmes : les conditions imposées aux extrémités sont généralement de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} F_1\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0, \\ F_2\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0, \end{cases}$$

la première devant être satisfaite pour $x = x_1$, la deuxième pour $x = x_2$, quel que soit t .

S'il existe une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles qui convienne au problème, elle devra donc, pour $t = 0$, satisfaire aux deux équations (1), pour $x = x_1$, satisfaire à la première équation (2) et, pour $x = x_2$, à la deuxième de ces équations.

Or il est bien connu que l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, à deux variables indépendantes, quand elle peut être exprimée par le moyen de fonctions arbitraires, ne renferme que deux de ces fonctions. L'indétermination qui existe dans l'intégrale générale n'est d'ailleurs pas plus grande quand elle ne peut être exprimée au moyen de fonctions arbitraires; il est donc fort difficile de concevoir comment on pourrait, en profitant de l'indétermination de l'intégrale générale, obtenir une intégrale particulière satisfaisant aux quatre conditions (1) et (2).

En réalité, il est généralement impossible de trouver une expression analytique unique satisfaisant à ces quatre conditions; on n'y parvient d'or-

dinaire que par la combinaison d'une infinité d'intégrales qui se substituent les unes aux autres suivant une certaine loi.

Ainsi les équations (1) suffisent pour définir une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles, mais l'expression obtenue ne satisfera généralement pas aux équations (2).

61. Il n'est pas inutile d'éclaircir les notions qui précèdent par un exemple simple.

Soit une tige cylindrique et homogène dont le mouvement est régi par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où l'on a posé pour simplifier $a^2 = \frac{E}{\rho_0}$. Soient zéro et λ les abscisses des tranches extrêmes, et

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

les équations qui définissent l'état initial. Il est visible que l'intégrale particulière correspondante est

$$u = 0.$$

Mais elle ne constitue la solution du problème que si les extrémités sont constamment en repos.

Quand les conditions imposées aux extrémités ne sont pas le repos, il faut, pour obtenir la solution cherchée, recourir à une combinaison d'intégrales.

Si, par exemple, les conditions imposées aux extrémités sont

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad u = \frac{at^2}{2} \quad \text{pour} \quad x = \lambda,$$

quel que soit t , le mouvement est représenté par une infinité d'intégrales qui se succèdent les unes aux autres, suivant une loi facile à obtenir. A chaque instant la tige est divisée en deux parties auxquelles correspondent deux intégrales distinctes. Pour le point d'intersection, les valeurs de u

sont égales, ainsi que celles de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial t}$; mais les valeurs des dérivées secondes ne sont pas les mêmes. Les deux intégrales conservent la même expression analytique pendant un temps égal à $\frac{\lambda}{a}$, au bout duquel l'une d'entre elles se trouve modifiée.

Pour t compris entre zéro et $\frac{\lambda}{a}$, les deux intégrales sont

$$u = 0, \quad u = \frac{x}{2a^2} (x + at - \lambda)^2.$$

Pour t compris entre $\frac{\lambda}{a}$ et $\frac{2\lambda}{a}$, elles deviennent

$$u = \frac{2xx}{a^2} (at - \lambda), \quad u = \frac{x}{2a^2} (x + at - \lambda)^2.$$

Pour t compris entre $\frac{2\lambda}{a}$ et $\frac{3\lambda}{a}$,

$$u = \frac{2xx}{a^2} (at - \lambda),$$

$$u = \frac{x}{2a^2} (x + at - \lambda)^2 + \frac{2xx}{a^2} (at - \lambda) + \frac{2x\lambda}{a^2} (2\lambda - x - at),$$

et ainsi de suite.

Ces formules déterminent la valeur de u qui correspond à toutes les valeurs positives de t et à toutes les valeurs de x comprises entre zéro et λ . A certains points de vue, la fonction u ainsi définie, qui est continue, ainsi que ses deux dérivées premières, pourrait être regardée comme une intégrale unique, puisqu'elle satisfait partout à l'équation aux dérivées partielles, sauf pour certaines valeurs de x et de t où les valeurs des dérivées secondes sont ambiguës.

Mais cette manière d'envisager les choses ne présente aucun avantage réel, car il est impossible d'exprimer la fonction u par une seule et même expression analytique finie.

Quand on représente la fonction u par une surface, en prenant x et t comme les coordonnées horizontales, il est visible que la surface obtenue est constituée par une infinité de portions de paraboloides hyperboliques

se raccordant les unes aux autres, mais qui, aux points de raccordement, n'ont pas la même indicatrice. Il semble peu naturel de regarder cet assemblage comme constituant une surface unique.

62. Dans un certain nombre de cas, analogues à celui qui vient d'être examiné, on est parvenu, il est vrai, à représenter l'ensemble de la solution par une formule unique, en faisant usage des séries trigonométriques. L'emploi de ces séries se justifie de lui-même quand le corps considéré est animé d'un mouvement périodique, comme dans le cas des vibrations sonores. Ces séries procèdent alors suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un même arc et mettent en évidence les différentes valeurs que peut acquérir la période du mouvement.

Mais on a cherché fréquemment à introduire ces séries dans des problèmes où leur emploi est bien loin d'être aussi avantageux. Le mouvement n'étant plus périodique, les nombres par lesquels on multiplie l'arc ne peuvent être entiers. Ce sont généralement les racines en nombre infini d'une certaine équation transcendante, qui varie d'ailleurs avec la nature du problème.

Les séries de cette espèce ont été employées pour la première fois par Fourier, dans son admirable *Traité de la chaleur*, et les problèmes dans lesquels il en a fait usage n'ont pu jusqu'ici être traités sans leur concours. Mais, quand il s'agit du mouvement des corps, ces séries présentent plusieurs inconvénients :

1° On ne connaît encore qu'imparfaitement les conditions dans lesquelles ces séries peuvent représenter les fonctions dont elles sont supposées exprimer le développement.

2° Ces séries ne sont pas toujours susceptibles de différentiation : ainsi, dans certains cas, on ne peut en faire usage pour calculer les vitesses et les dilatations, qui cependant sont presque toujours les quantités les plus importantes à connaître.

3° Les séries trigonométriques ne donnent aucune indication sur le mécanisme des phénomènes, c'est-à-dire sur la propagation et la réflexion du mouvement.

4° Enfin leur recherche devient impossible quand l'équation aux dérivées partielles cesse d'être linéaire.

63. Les solutions exprimées par des séries trigonométriques sont évidemment bien imparfaites à côté de celles où les valeurs de u , de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont exprimées sous forme finie au moyen de fonctions analytiques. C'est M. Phillips, qui, dans son important Mémoire du *Journal de Liouville* (1864), a le premier mis en évidence la supériorité de ces dernières solutions. Il n'a pas tardé à être suivi dans cette voie par M. de Saint-Venant, dans son Mémoire sur le choc longitudinal des prismes élastiques (*Journal de Liouville*, 1867). Mais ces éminents géomètres n'ont pas donné de méthode générale pour la détermination des solutions; de plus, ils se sont bornés à considérer des mouvements régis par une équation dont l'intégrale générale est connue, l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Cette intégrale générale est, du reste, exprimée par des fonctions arbitraires qu'il suffit de déterminer convenablement, comme dans les deux exemples qui ont été traités ci-dessus.

Or, comme on va le voir, une méthode générale existe et peut être appliquée même à des équations dont l'intégrale générale est inconnue. De plus, elle éclaire d'un jour tout nouveau les phénomènes de la propagation du mouvement.

64. Si l'on se reporte à l'exemple particulier qui a été traité ci-dessus, on voit que le prisme élastique était d'abord au repos, en d'autres termes que son mouvement était représenté par l'intégrale particulière $u = 0$. On a imprimé à l'extrémité λ un mouvement uniformément accéléré, la vitesse étant nulle au début, et aussitôt une nouvelle intégrale

$$(3) \quad u = \frac{\alpha}{2a^2} (x + at - \lambda)^2$$

a pris naissance à l'extrémité du corps, de sorte que celui-ci s'est trouvé partagé en deux parties : l'une, la plus voisine de l'origine, encore en

repos, l'autre dont le mouvement est représenté par l'équation précédente. La section de séparation a pour abscisse $x = \lambda - at$; égale à λ pour $t = 0$, elle s'avance vers l'origine en se déplaçant avec une vitesse a . Ainsi la nouvelle intégrale s'étend constamment aux dépens de la première; le mouvement qu'elle représente se propage avec une vitesse a . Il est à remarquer que la forme de la nouvelle intégrale ne dépend évidemment que du mouvement imprimé à l'extrémité et de l'état du corps à l'instant où elle a pris naissance.

Si le corps était indéfini du côté des x négatifs, le phénomène resterait constamment le même, c'est-à-dire que l'intégrale (3) continuerait à s'avancer avec la vitesse a .

Mais le corps est limité et, au moment où l'intégrale (3) parvient à l'extrémité $x = 0$, la nature du phénomène est modifiée par la fixité de ce point. Il se développe, en effet, au point $x = 0$, une nouvelle intégrale dont la forme est évidemment déterminée par la condition imposée à l'extrémité $x = 0$ et par l'intégrale (3). Cette nouvelle intégrale est

$$(4) \quad u = \frac{2ax}{a^2} (at - \lambda),$$

et la tige se trouve de nouveau partagée en deux parties; la plus rapprochée de l'origine a un mouvement représenté par (4), l'autre partie un mouvement représenté par l'intégrale (3). L'abscisse du point de séparation est $at - \lambda$; nulle à l'instant $t = \frac{\lambda}{a}$, où l'intégrale (3) parvenait à l'extrémité $x = 0$, cette abscisse augmente progressivement et se déplace vers la droite avec une vitesse a . L'intégrale (4) s'étend donc aux dépens de l'intégrale (3); elle se propage avec une vitesse a et finit par faire entièrement disparaître l'intégrale (3) à l'instant $t = \frac{2\lambda}{a}$; alors le mouvement de la tige entière est représenté par (4) et il persisterait indéfiniment si l'extrémité $x = \lambda$ était animée du mouvement défini par cette équation.

Mais, comme il n'en est pas ainsi, une nouvelle intégrale prend naissance au point λ ; c'est

$$(5) \quad u = \frac{a}{2a^2} (x + at - \lambda)^2 + \frac{2ax}{a^2} (at - \lambda) + \frac{2a\lambda}{a^2} (2\lambda - x - at),$$

et la forme de cette dernière résulte uniquement de l'intégrale (4) et de la condition imposée au mouvement du point λ .

L'intégrale (5) à son tour s'étend aux dépens de (4); en d'autres termes, elle se propage dans cette dernière avec une vitesse a , jusqu'à ce qu'elle arrive à l'extrémité $x = 0$ où prendra naissance une nouvelle intégrale.

63. On vient de voir comment les intégrales peuvent prendre naissance aux extrémités du corps. Quand le mouvement du prisme est représenté par une intégrale déterminée et que la condition imposée à l'extrémité n'est pas compatible avec le mouvement défini par cette intégrale, une autre intégrale prend naissance à l'extrémité et se développe aux dépens de la première, se propageant ainsi dans le corps avec une vitesse qui, comme on le verra plus loin, est toujours égale à a pour les prismes élastiques. La nouvelle intégrale ne peut évidemment dépendre que de l'intégrale primitive et de la condition imposée à l'extrémité.

Mais des intégrales nouvelles peuvent encore prendre naissance en d'autres points du corps; et, avant de généraliser les résultats qui précèdent, il est nécessaire d'étudier ce nouveau phénomène.

Considérant comme précédemment un cylindre homogène et élastique dont les abscisses extrêmes sont zéro et λ et qui est en repos à l'instant initial, on supposera les deux extrémités animées de mouvements uniformément accélérés, de sorte que l'on ait

$$u = \frac{1}{2} \beta t^2 \quad \text{pour } x = 0, \quad u = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \text{pour } x = \lambda,$$

quel que soit t .

Dans ces conditions, le mouvement du cylindre sera à chaque instant représenté par trois intégrales qui varieront d'ailleurs à chaque période de durée $\frac{\lambda}{2a}$.

Entre $t = 0$ et $t = \frac{\lambda}{2a}$, les trois intégrales sont

$$u = \frac{3}{2a^2} (at - x)^2, \quad u = 0, \quad u = \frac{\alpha}{2a^2} (at + x - \lambda)^2;$$

entre $t = \frac{\lambda}{2a}$ et $t = \frac{2\lambda}{2a}$, elles sont

$$u = \frac{\beta}{2a^2} (at - x)^2,$$

$$u = \frac{\alpha}{2a^2} (at + x - \lambda)^2 + \frac{\beta}{2a^2} (at - x)^2,$$

$$u = \frac{\alpha}{2a^2} (at + x - \lambda)^2;$$

les deux extrêmes sont restées les mêmes, celle du milieu a seule été modifiée. On verrait sans difficulté qu'entre $t = \frac{2\lambda}{2a}$ et $t = \frac{3\lambda}{2a}$ il existe trois autres intégrales; celle du milieu est la même que pour t compris entre $\frac{\lambda}{2a}$ et $\frac{2\lambda}{2a}$, mais les deux autres sont modifiées, et ainsi de suite.

Dans ce cas, la tige est au repos au début, tandis que les deux extrémités sont animées de mouvements uniformément variés pour lesquels la vitesse est nulle au début.

Il en résulte qu'à chacune de ces extrémités prend naissance une intégrale qui s'étend constamment aux dépens de l'intégrale primitive $u = 0$. Chacune de ces intégrales se propage avec la vitesse a , l'une du point zéro vers le point λ , l'autre en sens inverse; par conséquent, à l'instant $t = \frac{\lambda}{2a}$, les deux intégrales

$$u = \frac{\beta}{2a^2} (at - x)^2, \quad u = \frac{\alpha}{2a^2} (at + x - \lambda)^2$$

sont arrivées au milieu de la tige où elles se rencontrent. L'intégrale $u = 0$ a complètement disparu.

Il est clair qu'il doit se passer en ce point un phénomène particulier, et, en effet, une nouvelle intégrale y prend naissance; elle a pour expression

$$u = \frac{\alpha}{2a^2} (at + x - \lambda)^2 + \frac{\beta}{2a^2} (at - x)^2,$$

et l'on voit que, dans ce cas particulier, elle est égale à la somme des deux

précédentes ; mais il n'en est généralement pas ainsi. Quoi qu'il en soit, cette nouvelle intégrale prend évidemment naissance, parce que les deux premières ne peuvent subsister l'une à côté de l'autre. Son expression ne peut dépendre que des intégrales qui sont venues se rencontrer au milieu de la tige.

La nouvelle intégrale, d'abord limitée au point milieu, s'étend dans les deux sens aux dépens des deux premières ; la vitesse avec laquelle se déplacent les points qui la limitent est encore égale à a , de sorte qu'à l'instant $t = \frac{\lambda}{a}$ elle sera parvenue aux deux extrémités et subsistera seule dans la tige.

Mais, comme elle n'est pas compatible avec les conditions imposées aux deux extrémités, il naîtra en ces deux points de nouvelles intégrales qui s'étendront aux dépens de la précédente et finiront par la faire disparaître ; après quoi, une autre intégrale prendra naissance au milieu de la tige, et ainsi de suite.

66. Les exemples qui précèdent, bien que portant uniquement sur l'équation du mouvement d'une barre prismatique élastique, qui est la plus simple de toutes, suffisent pour faire concevoir comment les intégrales naissent et se développent. Deux cas bien distincts sont à considérer.

Supposant d'abord que le corps soit animé dans son ensemble d'un mouvement représenté par une intégrale

$$(6) \quad u = f(x, t)$$

de l'équation aux dérivées partielles qui lui correspondent, si l'une des extrémités, $x = \lambda$ par exemple, est animée, par suite des conditions particulières qui lui sont imposées, du mouvement

$$u = f(\lambda, t)$$

ou, plus généralement, si, la condition imposée à l'extrémité en question

étant

$$(7) \quad F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0,$$

l'expression (6) de u satisfait identiquement à l'équation précédente en y faisant $x = \lambda$, il ne se passera en ce point aucun phénomène particulier.

Mais, quand il n'en est pas ainsi, il naît en ce point une nouvelle intégrale qui est forcément tout à fait déterminée. Or les seules conditions qui lui sont imposées sont : 1° de satisfaire, pour $x = \lambda$, à la condition (7); 2° de pouvoir se propager dans l'intégrale (6).

Il importe ici de définir avec précision ce qu'on entend par propagation d'une intégrale dans une autre.

Que l'on conçoive un corps dont le mouvement est représenté à un instant donné par deux intégrales distinctes, et soit ξ l'abscisse du point de séparation de ces intégrales à un instant donné t . Si, à l'instant suivant $t + dt$, le mouvement est encore représenté par les deux mêmes intégrales, on dira qu'elles sont *compatibles* entre elles. Le point ξ se sera déplacé vers la droite, par exemple, d'une quantité $d\xi$, et la dérivée $\frac{d\xi}{dt}$ représentera la vitesse de propagation de la première intégrale dans la seconde.

Or on a vu au numéro précédent que deux intégrales données n'étaient pas toujours compatibles entre elles; car, dans l'exemple cité, il naissait, au point commun aux deux intégrales

$$u = \frac{\beta}{2a^2}(at - x)^2, \quad u = \frac{\alpha}{2a^2}(at + x - \lambda)^2,$$

une nouvelle intégrale qui se développait et s'étendait aux dépens des premières. La nouvelle intégrale obtenue était d'ailleurs compatible avec les deux autres; mais il est visible que la compatibilité exige une condition. Cette condition sera déterminée plus loin.

Pour en revenir au cas où une intégrale prend naissance à une extrémité, les conditions qui la déterminent complètement sont les suivantes :

1° satisfaire, pour $x = \lambda$, à la condition (7); 2° être compatible avec (6).

Quand, au contraire, l'intégrale nouvelle prend naissance au point commun à deux autres intégrales, elle est complètement déterminée par la condition d'être compatible avec les deux premières.

II. — CONDITION DE COMPATIBILITÉ DES INTÉGRALES.

67. On a fait remarquer, dans le Chapitre précédent, que certaines des équations aux dérivées partielles qui représentent le mouvement des corps par tranches parallèles pouvaient cesser d'être exactes quand la vitesse d'une tranche éprouvait une variation finie dans un temps infiniment petit. Pour rechercher la condition de compatibilité des intégrales, on supposera donc qu'au point commun les valeurs de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont égales, sauf à examiner spécialement plus tard les cas où se produisent des discontinuités.

Soit, d'une manière générale,

$$(1) \quad L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2K \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M = 0$$

l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement du corps; u_1 et u_2 sont deux intégrales qui, à l'instant t , représentent le mouvement de deux portions du corps, ayant un point commun ξ .

Si les intégrales sont compatibles, le point commun ξ est donné en fonction de t par l'équation

$$(2) \quad u_1 - u_2 = 0;$$

d'ailleurs on a, au point commun, par suite de la continuité,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0.$$

Ces équations doivent toujours avoir lieu au point commun, car la

continuité ne doit point disparaître; on peut donc les différentier en regardant ξ comme une fonction de t définie par l'équation (2), ce qui donne

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

D'autre part, les deux intégrales u_1 et u_2 satisfont à l'équation (1). Substituant donc dans cette équation u_1 , puis u_2 , à la place de u , attribuant ensuite à x la valeur ξ qui correspond au point commun à l'instant t , les valeurs de L , K , H et M qui dépendent uniquement de x , t , u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ seront égales, de sorte qu'en retranchant les équations obtenues, il restera

$$(5) \quad L \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) + 2K \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) + H \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Les équations (3), (4) et (5) ont lieu simultanément. Elles sont homogènes par rapport aux différences

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},$$

donc, si ces trois différences ne sont pas nulles, le déterminant doit s'annuler.

Faisant d'abord abstraction du cas où les trois dérivées secondes des fonctions seraient constamment égales au point commun, on a ainsi l'équation

$$(6) \quad L \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - 2K \frac{d\xi}{dt} + H = 0,$$

qui est la condition de compatibilité cherchée.

L'une des intégrales u_1 ou u_2 étant donnée, on prendra pour L , K , H les valeurs qui correspondent à l'intégrale donnée et qui sont, par suite,

des fonctions connues de x et t . Remplaçant alors x par ξ , l'équation (6) devient une équation différentielle du premier ordre dont l'intégration fournira ξ en fonction de t . L'autre intégrale devra être telle que l'équation $u_1 - u_2 = 0$ soit satisfaite quand on y remplace x par la fonction de t ainsi déterminée.

68. Il reste à examiner ce qui arrive quand les dérivées secondes des trois fonctions sont constamment égales au point commun. Dans ce cas on déduit de l'égalité des deux premières dérivées secondes

$$\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3} \right) + \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial t^2} \right) + \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} \right) \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Différentiant ensuite l'équation aux dérivées partielles par rapport à t , substituant successivement u_1 et u_2 , attribuant à x la valeur ξ et retranchant, il vient

$$L \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3} \right) + 2K \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial t^2} \right) + L \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} \right) = 0,$$

et, puisque le déterminant n'est pas nul, on en conclut que les trois dérivées troisièmes considérées sont égales. On montrerait ainsi sans difficulté que

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3},$$

et rien n'empêche de continuer le raisonnement, de proche en proche, pour tous les ordres.

D'après cela, si la condition (6) du n° 67 n'est pas satisfaite, il faut, pour que les intégrales u_1 et u_2 soient compatibles, que leurs dérivées de tous les ordres soient toujours égales au point commun. Les fonctions u_1 et u_2 ne sont pas, à proprement parler, deux fonctions distinctes dans le voisinage du point commun. Si elles sont développables, dans ce voisinage, d'après la formule de Taylor, elles sont rigoureusement égales.

69. Ainsi la condition pour que deux intégrales distinctes soient compatibles est celle qui est exprimée par l'équation (6). On peut en donner une interprétation géométrique remarquable.

On représentera, comme cela a déjà été fait au n° 61, la valeur u d'une intégrale de l'équation aux dérivées partielles par l'ordonnée d'une surface dont x et t représenteront les abscisses horizontales, les trois axes de coordonnées étant désignés par Ox , Ot et Ou . Cette surface peut être regardée comme représentant le mouvement du corps; en la coupant par des plans parallèles à xOu , on obtient l'état du corps aux différents instants. En la coupant par un plan parallèle à tOu , on obtient le mouvement d'un point donné.

La condition de compatibilité (6), pour une intégrale donnée, représente alors l'équation différentielle de la projection horizontale d'une courbe tracée sur la surface intégrale. Or cette équation peut s'écrire, en remplaçant ξ par x ,

$$H\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2K\frac{dt}{dx} + L = 0;$$

elle n'est autre que l'équation différentielle des projections horizontales des caractéristiques.

Ainsi les caractéristiques de la surface représentant un mouvement sont les courbes suivant lesquelles viennent se raccorder avec la première les surfaces représentant les mouvements compatibles avec le premier.

Toute surface intégrale, se raccordant avec la première suivant l'une de ses caractéristiques, admet aussi la courbe de raccordement pour caractéristique. Ainsi deux surfaces représentant des mouvements compatibles admettent une caractéristique commune. On a vu, dans le Chapitre I, que deux surfaces intégrales, qui admettent une caractéristique commune, peuvent, à certains égards, être regardées comme constituant une surface intégrale unique. C'est au même point de vue que l'on peut considérer l'ensemble des intégrales compatibles qui représentent le mouvement d'un corps comme constituant une intégrale unique.

III. — VITESSE DE PROPAGATION DES INTÉGRALES.

70. En désignant, comme précédemment, par ξ l'abscisse du point commun à deux intégrales compatibles, la vitesse de propagation d'une intégrale dans l'autre est égale à $\frac{d\xi}{dt}$ et, quand on donne l'une des intégrales, la condition de compatibilité permet de calculer cette vitesse sans intégration.

L'équation est du second degré en $\frac{d\xi}{dt}$; par conséquent il existe, en chaque point du corps et à chaque instant, deux vitesses de propagation. Quand la valeur de K est nulle, les deux vitesses de propagation sont égales et opposées, c'est-à-dire que la propagation peut s'effectuer dans les deux sens avec la même vitesse. C'est ce qui a lieu pour tous les corps qu'on aura occasion d'examiner plus tard.

L'expression analytique de la vitesse de propagation dépend uniquement des coefficients des dérivées du second ordre; il ne faudrait pas en conclure toutefois que les termes indépendants des dérivées du second ordre sont sans influence sur la vitesse de propagation. Cette vitesse dépend en effet de l'intégrale que l'on considère, et la forme des intégrales varie avec les termes indépendants des dérivées du second ordre.

Quand les coefficients des dérivées du second ordre sont uniquement fonctions de x et t , la vitesse de propagation est indépendante de l'intégrale particulière qu'on étudie; elle ne dépend que du point du corps et de l'instant considéré.

Quand les coefficients des dérivées du second ordre ne renferment que x , les deux valeurs de la vitesse de propagation sont déterminées pour chaque point du corps.

Enfin, lorsque ces coefficients sont constants, les deux valeurs de la vitesse de propagation sont constantes.

71. Quand aucune force extérieure n'agit sur les molécules du corps, celui-ci peut évidemment rester en repos, de sorte que $u = 0$ est une inté-

grale de l'équation aux dérivées partielles qui régit son mouvement. Pour cette intégrale particulière, les valeurs de H , K , L sont connues et, par suite, on connaît à l'avance et sans intégration les vitesses de propagation des intégrales compatibles avec $u = 0$, sans qu'il soit besoin pour cela de déterminer ces intégrales.

Les intégrales compatibles avec $u = 0$ représentent tous les mouvements qui peuvent se propager dans le corps supposé en repos, sans toutefois introduire de discontinuités, et leur vitesse de propagation est la véritable *vitesse de propagation du mouvement dans le corps*.

La vitesse de propagation du mouvement dans un corps est donc indépendante de la nature du mouvement qui se propage, pourvu qu'il n'y ait point de discontinuités. Cette vitesse est donnée par un calcul très simple aussitôt qu'on connaît l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement du corps.

En outre, il est clair que cette vitesse dépend uniquement des termes affectés des dérivées du second ordre. Les frottements et la viscosité ne peuvent aucunement la modifier, puisque ces résistances interviennent simplement dans les termes indépendants des dérivées du second ordre.

72. D'une manière générale, quand le mouvement d'un corps est représenté par une certaine intégrale u , les valeurs de H , K , L qui lui correspondent sont connues en fonction de x et de t ; on connaît donc à l'avance les vitesses de propagation des intégrales compatibles avec u , lesquelles représentent tous les mouvements qui peuvent se propager dans le premier, sans introduire de discontinuités. La vitesse de propagation dans cette intégrale u est la véritable généralisation de la vitesse de propagation du mouvement, comme dans le cas précédent; elle est indépendante de la nature du mouvement qui se propage: il suffit qu'il soit compatible avec le premier.

73. On peut donner de la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre une interprétation géométrique remarquable.

L'intégrale primitive étant, comme précédemment, représentée par une

surface, si l'on projette sur le plan xOt les caractéristiques de cette surface, l'équation différentielle des projections ainsi obtenues est

$$L \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - 2K \frac{d\xi}{dt} + H = 0;$$

si donc on regarde ξ comme l'ordonnée d'un point de l'une des courbes correspondant à l'abscisse t , $\frac{d\xi}{dt}$ représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe; d'où le théorème suivant :

Une intégrale étant donnée et représentée par une surface, la vitesse de propagation du mouvement dans cette intégrale est représentée, pour des valeurs données de x et de t , par le coefficient angulaire de la tangente à la projection horizontale de la caractéristique qui passe par le point correspondant de la surface.

Par chaque point de la surface intégrale passent deux caractéristiques, à chacune desquelles correspond une valeur de la vitesse de propagation.

Lorsque la projection de la caractéristique est une ligne droite, la vitesse de propagation est constante; dans le cas contraire, on doit la regarder comme une fonction de l'abscisse ξ du point commun aux deux intégrales.

IV. — DÉTERMINATION DU MOUVEMENT D'UN CORPS.

74. Le problème de la détermination du mouvement d'un corps s'effectuant par tranches parallèles peut être maintenant posé avec une entière précision. On va voir qu'en réalité il s'agit de résoudre, non un problème unique, mais une suite de problèmes qui doivent être traités de proche en proche et dans un ordre déterminé.

Pour simplifier, on supposera que l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement ne renferme pas de terme affecté de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$; c'est, ainsi qu'on l'a déjà fait observer, le cas de tous les corps naturels que l'on aura occasion de considérer.

On prendra d'abord le cas où le corps est en repos à l'instant initial et où la condition imposée à l'une des extrémités, λ par exemple, est compatible avec le repos. Si la condition imposée à l'autre extrémité, $x = 0$, était également compatible avec le repos, il ne naîtrait aucun mouvement dans le corps.

Mais, quand il en est autrement, un mouvement doit prendre naissance au point $x = 0$; ce mouvement est donné par une intégrale compatible avec le repos, et satisfaisant de plus à la condition imposée à l'extrémité.

Représentant les intégrales par des surfaces, le repos, défini par $u = 0$, est représenté par le plan horizontal xOt dont les caractéristiques sont connues *a priori*. La surface intégrale représentant le mouvement qui va naître se raccorde donc avec la première suivant la caractéristique qui passe par l'origine des coordonnées. Mais il passe par ce point deux caractéristiques de la surface $u = 0$; la propagation du mouvement devant avoir lieu dans le sens des x positifs, il faut prendre la caractéristique dont le coefficient angulaire est positif.

Il existe nécessairement une infinité de surfaces intégrales se raccordant avec $u = 0$ suivant la caractéristique ainsi définie et leurs expressions comportent l'indétermination qu'introduirait la présence d'une fonction arbitraire; car la condition imposée à l'extrémité est quelconque, assujettie à cette seule restriction de ne pas introduire de discontinuités, et, dans tous les cas, il existe une surface intégrale et une seule satisfaisant au problème, car il n'y a évidemment qu'un mouvement possible. Si, par exemple, on donne le mouvement de l'extrémité $x = 0$, l'expression analytique de ce mouvement peut être prise à volonté, de manière toutefois que la vitesse n'éprouve pas de variations brusques et soit nulle à l'origine; en d'autres termes, si $f(t)$ représente ce mouvement, la dérivée seconde $f''(t)$ est une fonction continue, mais d'ailleurs complètement arbitraire.

Si l'on peut obtenir l'expression générale des intégrales qui se raccordent avec $u = 0$ suivant la caractéristique qui passe par l'origine, il ne reste plus qu'à déterminer la fonction arbitraire, de manière qu'en fai-

sant $x = 0$ dans l'intégrale elle vérifie la condition imposée à l'extrémité.

On conçoit même qu'il existe des cas où, l'ensemble de ces intégrales restant inconnues, on puisse cependant déterminer celle qui convient au problème particulier que l'on traite; rien ne sera plus facile que de vérifier si elle satisfait aux conditions imposées. C'est en cela précisément que consiste le grand avantage de la méthode.

75. L'intégrale u_1 , qui prend naissance à l'extrémité étant supposée connue, on connaît également la vitesse avec laquelle elle se propage dans la première, $u = 0$; en d'autres termes, $\frac{d\xi}{dt}$ est une fonction connue de ξ , ce qui revient à dire qu'on peut regarder le point ξ commun aux deux intégrales comme donné en fonction de t . Le mouvement du corps est ainsi déterminé jusqu'au moment où la nouvelle intégrale est arrivée à l'extrémité λ du corps.

La condition imposée à l'extrémité λ , qui était compatible avec le repos, ne sera généralement pas compatible avec la nouvelle intégrale u_1 . Il se passe alors en ce point un phénomène particulier qui porte le nom de *réflexion du mouvement* et qui consiste en ce que, au point λ , prend naissance une intégrale u_2 définie par la condition d'être compatible avec u_1 et de satisfaire à la condition imposée à l'extrémité λ .

Si l'on représente, suivant les conditions adoptées, le mouvement par une surface et si t_1 désigne l'instant auquel l'intégrale u_1 est parvenue au point λ , on voit qu'il existe un point de l'intégrale u_1 ayant pour coordonnées horizontales t_1 et λ . L'intégrale u_2 , pour être compatible avec u_1 , doit avoir avec elle une caractéristique commune, passant par le point (t_1, λ) . Mais l'intégrale u_2 , devant se propager vers les x négatifs, le coefficient angulaire de cette caractéristique doit être négatif, ce qui la définit complètement. Il est à remarquer que des deux caractéristiques de la surface u_1 , qui passait par le point (t_1, λ) , l'une est précisément la courbe suivant laquelle u_1 se raccorde avec le plan horizontal $u = 0$, qui représente l'état primitif de repos du corps. C'est suivant la caractéristique de l'autre système que se fait le raccordement des deux surfaces u_1 et u_2 .

L'intégrale u_2 est définie par la condition de se raccorder avec l'intégrale u_1 suivant la caractéristique que l'on vient de définir, et de satisfaire à la condition imposée à l'extrémité λ . Comme le mouvement qui prend naissance par la réflexion est unique, l'intégrale en question est ainsi complètement déterminée.

Supposant cette intégrale u_2 connue, il en est de même de sa vitesse de propagation dans u_1 . On connaît donc le mouvement du corps jusqu'à l'instant t_2 où u_2 parvient à l'extrémité $x = 0$, où prendra naissance une intégrale u_3 définie par la condition de se raccorder avec u_2 suivant la caractéristique de coefficient angulaire positif qui passe par le point dont les coordonnées horizontales sont $x = 0$ et $t = t_2$, et par la nécessité de satisfaire à la condition imposée à l'extrémité $x = 0$.

En continuant de la même manière, on voit sans difficulté comment sont définies les intégrales u_1, u_3, \dots qui prennent naissance alternativement aux deux extrémités; chacune d'elles ne peut être obtenue qu'après qu'on a préalablement déterminé la précédente. L'une quelconque des intégrales, u_n par exemple, admet une caractéristique commune avec la précédente u_{n-1} et avec la suivante u_{n+1} ; ces deux caractéristiques ne sont pas du même système. L'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes est égale à zéro ou à λ , suivant que n est pair ou impair.

76. Il est facile de généraliser la méthode précédente. Considérant encore un corps dont x et λ sont les abscisses extrêmes et qui est animé à l'instant initial d'un mouvement représenté par une intégrale u_0 , on suppose que les conditions imposées aux extrémités soient incompatibles avec u_0 , mais de nature à ne pas introduire de discontinuités dans les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. Une intégrale nouvelle prend naissance à chaque extrémité; l'intégrale u_1 qui part de $x = 0$ se raccorde avec u_0 suivant la caractéristique à coefficient angulaire positif passant par le point $x = 0$, $t = 0$ de la surface représentant cette intégrale. L'intégrale u_2 qui part de λ se raccorde avec u_0 suivant la caractéristique à coefficient angulaire négatif qui passe par le point $x = \lambda$, $t = 0$ de cette même surface.

Ces deux intégrales se propagent en sens inverse dans la première avec

une vitesse connue, et se rencontrent en un certain point x_1 , à l'instant t_1 ; alors l'intégrale u_1 a complètement disparu.

Les deux intégrales u_1 et u_2 étant généralement incompatibles entre elles, il doit en naître une nouvelle au point x_1 ; soit u_3 cette nouvelle intégrale; il faut qu'elle se propage dans l'intégrale u_1 avec une vitesse négative et dans l'intégrale u_2 avec une vitesse positive.

Considérant la surface représentative du mouvement et menant par le point $x = x_1$, $t = t_1$ la caractéristique à coefficient angulaire négatif de l'intégrale u_1 , la caractéristique à coefficient angulaire positif de l'intégrale u_2 , l'intégrale u_3 devra se raccorder avec ces deux surfaces suivant ces caractéristiques. Puisqu'il n'y a qu'un mouvement possible, l'intégrale u_3 doit être complètement déterminée par ces seules conditions.

A partir de l'instant t_1 , l'intégrale u_3 s'étend de part et d'autre aux dépens des intégrales u_1 et u_2 . A un certain instant t_2 , l'une de ces dernières, u_1 par exemple, disparaît, et l'intégrale u_3 arrive à l'extrémité $x = 0$ où prend naissance une autre intégrale u_4 , et ainsi de suite.

77. La méthode qui vient d'être exposée indique d'une façon précise la marche générale qu'il y a lieu de suivre pour la résolution des problèmes du mouvement et met en évidence la nature des difficultés qu'on peut y rencontrer.

Pour que ces difficultés pussent être surmontées dans tous les cas, il faudrait que l'on sût, pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, ou du moins pour celles qui représentent un mouvement par tranches, résoudre la question suivante : Déterminer l'ensemble des surfaces intégrales qui se raccordent avec une surface intégrale donnée suivant une caractéristique donnée.

Ce problème, dans sa généralité, équivaut au fond à celui de l'intégration des équations aux dérivées partielles qui représentent le mouvement, lequel ne paraît pas près d'être résolu.

Mais il faut remarquer que l'on peut en trouver bien des solutions particulières dont chacune représente un cas de propagation de mouvement

dans un autre et constitue par suite un nouveau pas dans l'étude des phénomènes naturels.

On montrera dans le Chapitre IV la fécondité de cette méthode qui permet d'établir toute la théorie de la propagation du mouvement dans les fluides au moyen d'intégrales depuis longtemps connues, mais dont on n'avait jusqu'ici fait aucun usage pour étudier les propriétés du mouvement.

78. On a supposé jusqu'ici que l'on connaissait, pour l'instant initial, l'intégrale qui représente le mouvement du corps. Mais on définit parfois l'état initial en donnant la position de toutes les tranches, ainsi que leurs vitesses pour deux équations de la forme

$$u = F(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F_1(x),$$

qui ont lieu pour $t = 0$.

Dans ce cas, il est nécessaire de déterminer préalablement l'intégrale correspondante, c'est-à-dire celle qui se réduit à $F(x)$ pour $t = 0$, sa dérivée par rapport à t devenant alors égale à $F_1(x)$.

Ce problème ne présente pas grande difficulté quand l'intégrale générale est connue; mais, lorsqu'il en est autrement, il est impossible d'en donner la solution générale : on se bornera à en indiquer la traduction géométrique.

Le mouvement étant représenté par une surface, on donne son intersection par le plan xOu ; de plus on remarquera que de $u = F(x)$ on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(x);$$

on connaît donc le plan tangent tout le long de la courbe. Il s'agit, au moyen de ces données, de déterminer la surface intégrale. On est assuré que cette surface est unique, attendu qu'il n'y a qu'un mouvement possible.

Si l'on admet que l'intégrale u cherchée est développable d'après la

formule de Taylor, il est facile de calculer les termes du développement; mais il est inutile d'insister davantage sur ce sujet; car, dans la réalité, il est bien peu de cas où l'intégrale qui correspond à l'état initial ne soit pas connue à l'avance.

V. — APPLICATION. — PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES SOLIDES.

79. Il a été démontré au Chapitre II, n° 53, que le mouvement d'un solide élastique, dont la section ω est fonction de x , était régi par l'équation

$$\rho_0 \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d(E\omega)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

L'équation de compatibilité, qui se confond avec celle des caractéristiques, est ici

$$\rho_0 \omega \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - \omega E = 0.$$

On en déduit

$$(1) \quad \frac{d\xi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}.$$

La vitesse de propagation du mouvement est donc indépendante de ω et, par suite, reste la même quelle que soit la forme du corps. Son carré est égal au rapport du coefficient d'élasticité à la densité.

Les quantités E et ρ_0 étant ici des fonctions de x seulement, il en résulte que la vitesse de propagation a une valeur constante en chaque point du corps.

Quand le rapport $\frac{E}{\rho_0}$ est constant, la vitesse de propagation est constante.

L'intégration de l'équation (1) fournit les projections horizontales des caractéristiques des deux systèmes qui, puisque l'équation est linéaire, sont indépendantes des intégrales. On peut ainsi, quand on représente le mouvement par une surface, tracer à l'avance les projections horizontales des courbes suivant lesquelles se raccordent les diverses surfaces intégrales.

Lorsque le rapport $\frac{E}{\rho_0}$ est une constante, les caractéristiques se projettent horizontalement suivant des lignes droites.

80. Supposons maintenant que le solide soit cylindrique et le rapport $\frac{E}{\rho_0}$ constant, l'équation se réduit, en posant $\frac{E}{\rho} = a^2$, à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

L'intégrale générale est connue et a pour expression

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires. La condition de compatibilité est alors susceptible d'une interprétation simple relativement aux fonctions arbitraires.

Deux intégrales compatibles u_1 et u_2 ont une caractéristique commune; par conséquent, le long de l'intersection, l'une des quantités $x + at$ ou $x - at$ demeure constante. Supposant, par exemple, que $x - at = K$ représente l'équation de la ligne d'intersection, l'égalité des fonctions u_1 et u_2 le long de cette ligne donne

$$\varphi_1(x + at) - \psi_1(k) = \varphi_2(x + at) - \psi_2(k)$$

ou

$$\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at) = \psi_2(k) - \psi_1(k).$$

Le second membre étant indépendant du point considéré sur l'intersection, il faut qu'il en soit de même du premier, ce qui ne peut avoir lieu que si la différence $\varphi_1 - \varphi_2$ est égale à une constante que l'on peut d'ailleurs supposer introduite dans l'une des fonctions ψ_1 ou ψ_2 .

Ainsi, quand deux intégrales se raccordent le long d'une caractéristique $x - at = K$, les deux fonctions φ qui leur correspondent sont égales. Il est clair que la condition nécessaire est en même temps suffisante.

On verrait de même que, si deux intégrales se raccordent le long d'une caractéristique du deuxième système $x + at = k'$, les deux fonctions ψ qui leur correspondent sont égales.

Quand une intégrale est compatible avec deux autres, elle emprunte à l'une sa fonction φ , à l'autre sa fonction ψ , et se trouve ainsi connue, sauf une constante arbitraire que l'on détermine par la condition que les valeurs de u soient les mêmes aux points communs.

81. Un cylindre élastique étant animé à l'instant t , d'un mouvement représenté par une intégrale

$$u_1 = \varphi_1(x + at) + \psi_1(x - at),$$

on voit aisément comment on déterminera la nouvelle intégrale qui prend naissance à une extrémité. Supposant, par exemple, que cette extrémité ait pour abscisse λ et soit tournée vers les x positifs, si l'on désigne par

$$u_2 = \varphi_2(x + at) + \psi_2(x - at)$$

la nouvelle intégrale, elle doit être compatible avec la première et les surfaces correspondantes se raccordent suivant une caractéristique du deuxième système dont l'équation est

$$x + at = \lambda + at_1.$$

On a donc $\psi_2 = \psi_1$, et il reste à déterminer la fonction φ_2 . Or soit

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$$

la condition imposée à l'extrémité λ . On remplacera dans l'équation précédente u par u_2 en attribuant à ψ_2 la valeur connue ψ_1 , et l'on fera ensuite $x = \lambda$. On obtiendra ainsi une équation différentielle du second ordre dans laquelle la fonction inconnue sera $\varphi(\lambda + at)$. Posant $\lambda + at = y$, l'intégration de l'équation fournira la fonction φ de y , dans laquelle il faudra ensuite remplacer y par $x + at$.

La fonction φ renfermera deux constantes arbitraires qu'on déterminera en exprimant que pour $x = \lambda$, $t = t_1$, les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont égales pour les deux intégrales u_1 et u_2 .

La détermination de l'intégrale u_2 dépend donc, comme on voit, de

l'intégration d'une équation différentielle du second ordre toujours facile à former.

On montrera, du reste, dans le Chapitre V, que la méthode précédente ne cesse pas d'être applicable, pour le mouvement des cylindres élastiques, quand il s'introduit des discontinuités dans les dérivées de la fonction u .

VI. — MOUVEMENT D'UNE TIGE PESANTE VERTICALE FIXÉE A SA PARTIE SUPÉRIEURE ET PORTANT UNE MASSE PESANTE A L'AUTRE EXTRÉMITÉ.

82. Comme exemple particulier, et afin de bien faire comprendre la méthode, on traitera le problème suivant :

Une tige verticale pesante est fixée à sa partie supérieure et se trouve en équilibre sous l'action de son poids. On fixe à la partie inférieure un corps de poids Q assimilé à un solide invariable et le système est abandonné sans vitesse. On demande de déterminer le mouvement du système.

Ce problème a été traité par Poncelet (*Introduction à la Mécanique industrielle*, 3^e édition, p. 419), mais en négligeant la masse de la tige. Dans ces conditions, le mouvement du poids est un mouvement vibratoire simple, à oscillations isochrones.

Il est vrai que, dans une note de la page 460, l'auteur donne la solution générale du problème en tenant compte de l'inertie de la tige; mais cette solution est donnée par une série trigonométrique dans laquelle les arcs sont multipliés par les racines en nombre infini de l'équation transcendante

$$\gamma L \tan \gamma L = K,$$

où L et K sont des constantes, et ne fournit aucun renseignement sur la manière dont le mouvement se développe et se propage.

83. La tige étant soumise à une force extérieure, qui est la pesanteur, il est facile de voir que l'équation aux dérivées partielles qui régit son

mouvement est, en prenant l'axe des x dirigé de haut en bas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g,$$

g désignant la gravité.

L'équation admet une intégrale particulière indépendante du temps, savoir

$$u_0 = -\frac{g}{2a^2}x^2 + Ax + B,$$

où A et B sont des constantes.

On déterminera les constantes de manière que l'intégrale représente l'état d'équilibre de la tige quand elle n'est soumise qu'à son propre poids.

L'origine des coordonnées étant supposée au point de suspension, soit λ la longueur de la tige; il faut que u_0 soit nul pour $x = 0$ et $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ également nul pour $x = \lambda$; donc $B = 0$, $A = \frac{g\lambda}{a^2}$. On a ainsi

$$u_0 = -\frac{g}{2a^2}x^2 + \frac{g\lambda}{a^2}x.$$

et la valeur des u_0 est celle qui correspond à l'état de la tige avant qu'on ait abandonné à elle-même la masse additionnelle.

Posant maintenant $u = u' + u_0$, l'équation qui détermine u' est

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2};$$

elle est réduite à la forme ordinaire; le déplacement u' est celui qui a été subi par un point de la tige, à partir de la position d'équilibre. Il est donc inutile de conserver les accents dans l'équation précédente; mais, quand les intégrales auront été obtenues, il faudra ajouter à chacune d'elles u_0 pour avoir l'état réel de la tige.

84. Il reste à trouver les intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui conviennent au problème. L'état initial de la tige est le repos et, grâce à la transformation qui vient d'être faite, est représenté par l'intégrale $u = 0$.

La condition imposée à l'extrémité fixe est évidemment $u = 0$ pour $x = 0$, quel que soit t .

Pour avoir la condition imposée à l'extrémité λ , il suffit d'exprimer que le poids est en équilibre sous l'action de sa force d'inertie $-\frac{Q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, de son poids Q et de la tension de la tige, laquelle est dirigée de bas en haut et égale à $E\omega \frac{\partial u}{\partial x}$. On a donc, pour $x = \lambda$, quel que soit t ,

$$(1) \quad \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Q - E\omega \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - g = 0,$$

en posant $\frac{E\omega g}{Q} = \alpha$.

Quand une intégrale prend naissance au point fixe, elle se raccorde avec celle qui représente à cet instant le mouvement du corps suivant une caractéristique $x - at = K$; par conséquent, elle emprunte à la première sa fonction φ et il suffit de déterminer la fonction ψ .

De même, quand une intégrale prend naissance à l'extrémité λ , il suffit de déterminer la fonction φ qui lui correspond.

85. Au début du phénomène, une intégrale prend naissance à l'extrémité λ ; sa fonction ψ est nulle, puisqu'elle est la même que pour $u = 0$; donc, en désignant par φ_1 la fonction φ qui lui correspond,

$$\alpha^2 \varphi_1''(\lambda + at) + \alpha \varphi_1'(\lambda + at) - g = 0,$$

l'intégration donne

$$\varphi_1(\lambda + at) = Ce^{-\frac{\alpha}{\alpha^2}(\lambda + at)} + \frac{g}{\alpha}(\lambda + at) + C'.$$

Les constantes arbitraires C et C' doivent être déterminées par la condition que, pour $t = 0$, la valeur de u soit nulle, ainsi que la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$,

ce qui réduit l'expression précédente à

$$\varphi_1(\lambda + at) = \frac{gat}{\alpha} - \frac{ga^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\frac{at}{a}} \right).$$

Posant maintenant $\lambda + at = z$, puis remplaçant z par $x + at$, on obtient l'intégrale cherchée u_1 ,

$$u_1 = \frac{g}{\alpha} (x + at - \lambda) - \frac{ga^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{\frac{\alpha(\lambda - x - at)}{a^2}} \right).$$

La valeur $\varphi_1(\lambda + at)$ représente le mouvement de la masse additionnelle, tant que l'intégrale u_1 subsiste dans le voisinage du point λ , c'est-à-dire pendant un temps égal à $\frac{2\lambda}{a}$. Il est facile de voir que la vitesse, nulle au début du mouvement, est constamment croissante.

L'intégrale u_1 arrive à l'origine au bout du temps $\frac{\lambda}{a}$. Pour déterminer la nouvelle intégrale u_2 , il suffit de remarquer qu'elle emprunte à u_1 sa fonction φ ; on a donc

$$\varphi_2(x + at) = \varphi_1(x + at) = u_1.$$

On a de plus, puisque u_2 s'annule pour $x = 0$,

$$\varphi_2(at) + \psi_2(-at) = 0,$$

$$\psi_2(-at) = -\varphi_1(at) = -\frac{g}{\alpha} (at - \lambda) + \frac{a^2 g}{\alpha^2} \left(1 - e^{\frac{\alpha(\lambda - at)}{a^2}} \right).$$

Remplaçant dans cette équation $-at$ par z , puis z par $x - at$, ce qui revient à remplacer $-at$ par $x - at$, on trouve

$$\psi_2(x - at) = -\frac{g}{\alpha} (at - x - \lambda) + \frac{ga^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{\frac{\alpha(x - at + \lambda)}{a^2}} \right).$$

L'intégrale u_2 est ainsi complètement déterminée.

86. Cette intégrale u_2 arrive au point λ à l'instant $t = \frac{2\lambda}{a}$. L'intégrale u_1 qui prend naissance au point λ à cet instant a la fonction ψ commune avec

l'intégrale u_2 ; ainsi

$$\psi_3 = \psi_2.$$

Il reste à déterminer la fonction $\varphi_3(x + at)$. Or on a, d'après (1),

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_3}{\partial x} - g = 0,$$

pour $x = \lambda$, ce qui donne

$$a^2 \varphi_3''(\lambda + at) + \alpha \varphi_3'(\lambda + at) = g - a^2 \psi_3''(\lambda - at) - \alpha \psi_3'(\lambda - at),$$

ou, en remplaçant $\psi_3(\lambda - at)$ par sa valeur connue,

$$a^2 \varphi_3''(\lambda + at) + \alpha \varphi_3'(\lambda + at) = 2g e^{\frac{\alpha}{a^2}(2\lambda + at)}.$$

Cette équation s'intègre sans difficulté et donne

$$\varphi_3(\lambda + at) = -\frac{2g}{\alpha} (\lambda + at) e^{-\frac{\alpha t}{a}} + C e^{-\frac{\alpha t}{a}} + C'.$$

Les deux constantes se déterminent en exprimant qu'à l'instant $t = \frac{2\lambda}{a}$ les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$, fournies par les intégrales u_1 et u_3 , sont égales pour $x = \lambda$.

L'expression à laquelle on arrive pour $\varphi_3(\lambda + at)$ étant assez complexe, on se dispensera de la reproduire ici. Après l'avoir calculée, il suffirait d'y remplacer t par $\frac{x + at - \lambda}{a}$ pour obtenir $\varphi_3(x + at)$, et, par suite, l'intégrale u_3 .

On obtiendrait ensuite aisément l'intégrale u_1 , puis on aurait à chercher l'intégrale u_2 , ce qui conduirait encore à une équation linéaire, facile à intégrer en termes finis. Les calculs peuvent être poussés aussi loin qu'on le désire; mais ils deviennent de plus en plus fastidieux.

Les limites de ce travail ne permettent pas de discuter les formules obtenues. On a voulu simplement montrer comment la méthode de détermination des intégrales conduit tout naturellement à la solution complète d'un problème qui n'avait point été résolu jusqu'à présent.

VII. — VITESSE DE PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES FLUIDES.

87. On supposera d'abord que le fluide dont il s'agit est un gaz parfait. L'équation aux dérivées partielles, qui régit le mouvement de ce corps quand il est renfermé dans une enveloppe cylindrique, a été établie au n° 48. L'ensemble des termes du second ordre est

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m f(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$f(x)$ désigne la pression correspondant à l'abscisse x pour l'état primitif du corps.

La formule qui donne la vitesse de propagation des intégrales devient ici

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{m f(x)}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1}$$

ou, en posant $f(x) = p_0$,

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{m p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1}.$$

Quand il n'y a pas de forces extérieures, le gaz peut rester en repos; donc $u = 0$ est une intégrale pour laquelle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est nul. Ainsi la vitesse de propagation du mouvement dans un gaz en repos est donnée par la formule

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{m p_0}{\rho_0},$$

quand il ne se produit pas de discontinuités.

Cette expression est connue depuis Laplace; mais elle n'a jamais été démontrée rigoureusement.

La démonstration qu'on en donne d'ordinaire est la suivante : D'abord on suppose le gaz homogène et la température uniforme à l'état de repos, puis on fait abstraction des frottements et de la viscosité, ce qui réduit,

comme on sait, l'équation aux dérivées partielles à

$$(1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On se borne ensuite à considérer le cas où la dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ serait négligeable devant l'unité et l'on réduit l'équation précédente à

$$(2) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sans justifier autrement cette simplification. L'équation ainsi obtenue est la même que celle des solides et l'on en déduit sans difficulté la valeur connue de la vitesse du son.

Mais cette manière d'opérer manque absolument de rigueur. S'il est permis en effet de supprimer dans les relations finies des quantités négligeables par rapport à celles que l'on conserve, on doit bien se garder d'en agir de même dans les équations différentielles, à moins que l'on ne puisse assigner une limite à l'erreur que l'on commet.

D'ailleurs toute simplification opérée dans une équation différentielle revient à changer les hypothèses primitivement admises; l'équation primitive supposait que chaque tranche se détendait suivant la loi adiabatique, de manière que le produit $p v^m$ demeurât constant. La pression était ainsi en raison inverse de la puissance m du volume.

Or, si dans la relation

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m}$$

on développe le binôme en s'arrêtant aux deux premiers termes, il reste

$$p \approx p_0 - m p_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

L'équation (2) suppose que c'est cette relation qui existe entre le volume et la dilatation d'une tranche. Ainsi, quand on adopte l'équation (2) comme équation du mouvement des gaz, on admet implicitement que la pression varie proportionnellement à la dilatation, ce qui est manifestement en désaccord avec la loi de détente adiabatique.

La démonstration qui a été donnée plus haut de la formule de la vitesse de propagation est, au contraire, d'une entière rigueur. De plus, elle montre que la formule n'est aucunement modifiée par la viscosité et même par les frottements de l'enveloppe, en admettant du moins que ces derniers laissent subsister sensiblement le mouvement par tranches parallèles.

88. Lorsque, le gaz étant indéfini dans tous les sens, le mouvement a lieu par couches sphériques, l'équation aux dérivées partielles est, comme on l'a vu au n° 34,

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -z^2 p_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[z^{-2m} x^{2m} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-m} \right];$$

x désigne ici le rayon primitif de la couche considérée, z son rayon à l'instant t . La théorie de la propagation du mouvement est applicable à cette équation comme à celle qui représente le mouvement dans le cylindre; l'ensemble des termes affectés des dérivées du second ordre étant

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - m p_0 z^{-2m+2} x^{2m} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

on a, pour la vitesse de propagation des intégrales,

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{m p_0}{\rho_0} x^{2m-2} z^{-2m+2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-m-1}.$$

Quand l'état du gaz est le repos, l'intégrale est $z = x$, d'où l'on déduit $\frac{dz}{dx} = 1$. La vitesse de propagation du mouvement dans un gaz en repos et indéfini dans tous les sens est donc donnée par la formule

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{m p_0}{\rho_0},$$

comme si le gaz était renfermé dans un tuyau cylindrique.

La formule reste la même quand on tient compte de la viscosité, puisque cette résistance ne peut que modifier, dans l'équation aux dérivées partielles, les termes indépendants des dérivées du second ordre.

Elle n'est d'ailleurs applicable qu'autant qu'il ne se produit pas de discontinuités dans les vitesses.

On a démontré depuis bien longtemps que la propagation du mouvement dans un gaz indéfini s'effectuait avec la même vitesse que dans un cylindre; mais, pour cette démonstration, les équations du mouvement étaient toujours réduites à la forme linéaire, ce qui revient à attribuer aux gaz des propriétés fort différentes de celles qu'ils possèdent en réalité.

89. Les résultats qui précèdent sont relatifs au cas où le mouvement se propage dans un gaz en repos; mais il est facile de les généraliser et d'établir un théorème général.

A cet effet, on modifiera d'abord la définition de la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre. Quand on représente cette vitesse par $\frac{d\xi}{dt}$, on entend par là que, dans l'instant dt , le point commun aux deux intégrales passe de la tranche dont l'abscisse initiale est ξ à celle dont l'abscisse initiale est $\xi + d\xi$. Mais, à l'instant considéré, les abscisses de ces tranches sont devenues $\xi + u$ et $\xi + d\xi + u + \frac{\partial u}{\partial x} d\xi$, u désignant le déplacement subi par la tranche ξ . La longueur réellement parcourue dans le fluide par le point commun aux deux intégrales n'est donc pas $d\xi$, mais $d\xi \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

On voit par là que $\frac{d\xi}{dt}$ représente la vitesse de propagation rapportée à l'état initial, tandis que, si on la rapporte à l'état actuel du corps, elle a pour valeur

$$\frac{d\xi}{dt} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Adoptant cette dernière définition, le théorème dont il s'agit est le suivant :

Quand un mouvement se propage dans un autre, la vitesse de propagation est toujours égale, pour les gaz, à $\sqrt{\frac{mp}{\rho}}$, p désignant la pression et ρ la densité au point de séparation des deux mouvements.

Ce théorème suppose, bien entendu, qu'il ne se produit pas de discontinuité dans les vitesses au point commun aux deux intégrales.

Pour le démontrer, on considérera d'abord le cas où le gaz est renfermé dans une enveloppe cylindrique. On a alors

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{mp_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m+1}.$$

Mais

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m}, & \text{d'où} & \quad p_0 = p \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \\ \rho &= \rho_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1}, & \text{d'où} & \quad \rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

et, en substituant dans l'équation précédente, à la place de p_0 et ρ_0 , leurs valeurs, on trouve

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{mp}{\rho},$$

ce qui démontre le théorème pour ce cas particulier.

Lorsque le mouvement a lieu par couches sphériques, on a

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{mp_0}{\rho_0} x^{2m-2} z^{-2m+2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-m+1}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left[\frac{z^2}{x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \right]^{-m}, & \text{d'où} & \quad p_0 = p \left[\frac{z^2}{x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right]^m, \\ \rho &= \rho_0 \left[\frac{z^2}{x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right]^{-1}, & \text{d'où} & \quad \rho_0 = \rho \left(\frac{z^2}{x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

et la substitution de ces valeurs de p_0 et ρ_0 dans l'équation donne

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{mp}{\rho},$$

comme précédemment.

90. Quand il s'agit d'un fluide quelconque homogène renfermé dans un tuyau cylindrique, l'équation aux dérivées partielles qui régit le mou-

vement est (n° 31)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi' \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

d'où il résulte

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \varphi' \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

La vitesse de propagation du mouvement dans le fluide en repos s'obtient en faisant $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ dans cette équation.

Lorsque le même fluide est animé d'un mouvement par ondes sphériques, les termes affectés des dérivées du second ordre dans l'équation aux dérivées partielles sont (n° 35)

$$\rho_0 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(x+u)^4}{x^2} \varphi' \left[\frac{(x+u)^2}{x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

la fonction φ' étant la même que dans le cas précédent si, pour l'instant initial, le volume spécifique et la pression sont les mêmes. On a donc alors

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{(x+u)^4}{x^2} \varphi' \left[\frac{(x+u)^2}{x^2} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right],$$

et la vitesse de propagation dans le fluide en repos s'obtient en faisant $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u = 0$ dans cette expression. Il est visible qu'alors la valeur de la vitesse de propagation $\frac{d\xi}{dt}$ prend la même valeur que pour le cas du cylindre.

Quand, au lieu de la vitesse de propagation du mouvement $\frac{d\xi}{dt}$ qui se rapporte à l'état initial, on considère la vitesse $\frac{d\xi}{dt} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ qui se rapporte à l'état actuel du corps, on peut, pour un fluide quelconque, établir un théorème général, analogue à celui qui a été démontré pour les gaz parfaits.

Lorsqu'un mouvement se propage dans un autre, la vitesse de propa-

gation est toujours, pour un fluide non conducteur, représentée par une même fonction de la pression p et de la densité ρ au point de séparation des deux mouvements. Cette fonction ne peut dépendre que de l'état initial.

Pour simplifier la démonstration, on supposera le fluide renfermé dans une enveloppe cylindrique.

La conductibilité du fluide étant négligée, ainsi que celle de l'enveloppe, la pression est liée au volume spécifique, si toutefois il ne se produit pas de discontinuités, par une relation de la forme

$$p = F\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right)$$

(n° 31), la constante α dépendant uniquement de l'état initial. On en déduit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = F'\left(\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}, \alpha\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{1}{\rho_0 g}.$$

Tirant de la première équation la valeur de $\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho_0 g}$ en fonction de p et de α , et transportant dans la seconde, on trouvera évidemment

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho_0} \psi(p, \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

de sorte que l'équation aux dérivées partielles du mouvement pourra s'écrire

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \psi(p, \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et l'on aura, pour la vitesse de propagation,

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{\rho_0^2} \psi(p, \alpha) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Donc

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \psi(p, \alpha),$$

ce qui démontre le théorème.

(*A suivre.*)



L'ÉNERGIE LIBRE ET LES CHANGEMENTS D'ÉTAT

PAR M. J. MOUTIER:

M. Clausius a établi, pour les cycles fermés et réversibles, une proposition fondamentale, qui est la généralisation du théorème de Carnot. Si l'on appelle, pour abrégé, *élément de transformation*, le quotient par la température absolue de la chaleur absorbée dans une transformation élémentaire, *dans tout cycle fermé et réversible, la somme des éléments de transformation est nulle.*

D'après cette proposition, lorsqu'un corps passe d'un état initial à un état final par un trajet réversible, la somme des éléments de transformation est indépendante du trajet suivi par le corps. Cette somme ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Dès lors, cette somme peut être considérée comme la variation d'une fonction particulière, désignée par M. Clausius sous le nom d'*entropie*.

M. Clausius a établi une seconde proposition fondamentale, relative aux cycles fermés et non réversibles : *dans tout cycle fermé et non réversible, la somme des éléments de transformation est négative.*

D'après cette seconde proposition, lorsqu'un corps passe d'un état initial à un état final par un trajet irréversible, la somme des éléments de transformation est moindre que la somme des éléments de transformation dans tout trajet réversible, accompli entre le même état initial et le même état final.

Cette propriété générale prend une forme très simple dans le cas parti-

culier où les transformations sont isothermiques. La somme des éléments de transformation est alors égale au quotient de la chaleur absorbée dans la transformation par la température absolue à laquelle s'accomplit la transformation : la chaleur absorbée par un corps qui éprouve une transformation isothermique et irréversible est moindre que la chaleur absorbée par le corps, lorsque ce corps passe de l'état initial à l'état final, par une transformation isothermique et réversible.

On a coutume, dans l'étude de la chaleur, de considérer comme positives les quantités de chaleur absorbées dans les diverses transformations que les corps peuvent éprouver : il est souvent plus commode, dans les applications, de considérer, comme positives, les quantités de chaleur dégagées dans les transformations. La chaleur dégagée par un corps qui éprouve une transformation isothermique et irréversible est plus grande que la chaleur dégagée, lorsque le corps passe de l'état initial à l'état final par une transformation isothermique et réversible.

La chaleur dégagée dans une transformation isothermique et irréversible peut toujours se décomposer en deux parties. L'une de ces parties est la chaleur dégagée par le corps qui passe de l'état initial à l'état final par une transformation isothermique et réversible : M. Clausius l'a désignée sous le nom de *chaleur compensée* ⁽¹⁾. L'autre partie est la *chaleur non compensée*; elle est toujours positive, lorsque la transformation isothermique est irréversible.

Ainsi, d'une manière générale, pour qu'une transformation isothermique puisse s'accomplir, il faut nécessairement que la chaleur non compensée soit positive ou nulle.

La chaleur non compensée correspond à un travail, qui est le travail non compensé. Lorsque la transformation isothermique s'accomplit sous

⁽¹⁾ L'expression de *chaleur compensée* a pour origine la forme sous laquelle M. Clausius énonce la proposition relative aux cycles fermés réversibles : *Toutes les transformations qui s'effectuent doivent se compenser mutuellement, de telle sorte que leur somme algébrique soit nulle*. Toute transformation réversible peut être considérée comme faisant partie d'un cycle fermé réversible; en d'autres termes, toute transformation réversible peut être *compensée* par les autres transformations réversibles qui ferment le cycle (*Théorie mécanique de la chaleur*, trad. Folie, t. I, p. 150; 1854).

pression constante ou sous volume constant, le travail non compensé dans chacun de ces deux cas particuliers est la variation, prise en signe contraire, d'une fonction particulière appelée par M. Helmholtz l'*énergie libre*.

Si l'on appelle E l'équivalent mécanique de la chaleur, U la chaleur interne, S l'entropie, l'énergie libre sous pression constante d'un corps qui occupe le volume ν à la température absolue T et sous la pression p a pour expression

$$\mathcal{F} = E(U - TS) + p\nu.$$

L'énergie libre, sous volume constant du corps, dans les mêmes conditions, est

$$f = E(U - TS).$$

Ces deux fonctions sont liées d'une manière très simple à deux autres fonctions, introduites par M. Massieu dans la Thermodynamique, sous le nom de *fonctions caractéristiques* ⁽¹⁾. L'énergie libre sous pression constante et l'énergie libre sous volume constant sont les fonctions caractéristiques, multipliées par l'équivalent mécanique de la chaleur changé de signe.

M. Massieu a montré le rôle important que jouent les fonctions caractéristiques dans l'étude de la chaleur; tous les coefficients qui déterminent les propriétés physiques d'un corps peuvent s'exprimer au moyen des fonctions caractéristiques et de leurs dérivées. Lorsque deux corps ont la même fonction caractéristique, ces corps occupent le même volume dans les mêmes conditions de température et de pression; ils suivent les mêmes lois de dilatation sous pression constante ou sous volume constant, ils suivent la même loi de compressibilité, ils absorbent la même quantité de chaleur, lorsque la température s'élève du même nombre de degrés sous pression constante ou sous volume constant.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 858 et 1057; 1869. — *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences*, t. XXII. — *Journal de Physique théorique et appliquée*, 1^{re} série, t. VI, p. 216.

M. Gibbs a considéré ces fonctions à un point de vue différent ⁽¹⁾; il a montré que ces fonctions varient dans un sens déterminé, toujours le même, chaque fois qu'une transformation peut s'accomplir. M. Gibbs a déduit ainsi des principes de la Thermodynamique une théorie générale qui embrasse l'ensemble de tous les phénomènes de dissociation. Les équilibres des systèmes les plus complexes sont renfermés dans une formule générale qui règle à la fois les divers modes de dissociation et la formation des combinaisons chimiques, en partant des éléments libres.

La théorie de M. Gibbs embrasse les équilibres chimiques et les phénomènes qui s'accomplissent dans une pile voltaïque. M. Helmholtz, dans une série de Mémoires consacrés à la *Thermodynamique des phénomènes chimiques* ⁽²⁾, a donné une grande extension aux idées émises primitivement par M. Gibbs au sujet de l'origine de la force électromotrice. La nouvelle théorie montre la part qui revient à l'action chimique dans la production de l'énergie voltaïque; elle établit des relations entre la force électromotrice d'un couple voltaïque et le degré de concentration des liqueurs, la température et la pression.

M. Duhem, dans un Ouvrage publié récemment ⁽³⁾, où il a exposé les recherches de M. Gibbs et de M. Helmholtz, a fait l'application de la théorie de l'énergie libre aux changements d'état; il a retrouvé, d'une manière très simple, les propriétés relatives aux changements d'état irréversibles, obtenues précédemment par la considération des cycles isothermiques ⁽⁴⁾.

On se propose d'indiquer ici quelques applications de la théorie de l'énergie libre à l'étude des changements d'état. Il est nécessaire auparavant

⁽¹⁾ *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, t. III, p. 108 et 343; 1875-1878. — *Sillimann's Journal*, t. XVI, p. 441; 1878. — *American Journal of Arts and Sciences*, t. XVIII; 1879.

⁽²⁾ *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, t. I, p. 23 et 825 (1882); t. II, p. 647 (1883).

⁽³⁾ *Le Potentiel thermodynamique et ses applications à la Mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques*; 1886. — M. Duhem appelle *potentiel thermodynamique* la fonction désignée par M. Helmholtz sous le nom d'*énergie libre*.

⁽⁴⁾ *Encyclopédie chimique*, t. I, Introduction, 2^e fasc., p. 381. — *Cours de Physique*, t. II, p. 448. — *La Thermodynamique et ses principales applications*, p. 339.

de rappeler quelques propriétés, relatives aux variations que peuvent éprouver les fonctions caractéristiques ou les énergies libres, par suite des variations que peuvent éprouver la pression, le volume et la température.

L'énergie libre sous pression constante d'un corps dépend à la fois de la pression et de la température.

Lorsque la pression et la température éprouvent des variations infiniment petites, la variation de l'énergie libre sous pression constante a pour expression

$$d\mathcal{F} = E(dU - S dT - T dS) + p dv + v dp.$$

La quantité de chaleur absorbée dans une transformation élémentaire a pour expression, en fonction de l'entropie, $T dS$. Cette quantité de chaleur est la somme de deux autres quantités, l'accroissement de la chaleur interne dU et la chaleur consommée en travail externe $A p dv$, en appelant A l'équivalent calorifique du travail. On a la relation

$$T dS = dU + A p dv.$$

En tenant compte de cette dernière relation, on a, pour la variation de l'énergie libre sous pression constante,

$$d\mathcal{F} = v dp - ES dT.$$

La variation de l'énergie libre sous volume constant a pour expression générale

$$df = - p dv - ES dT.$$

Dans toute transformation isothermique opérée sous pression constante ou sous volume constant, la variation de l'énergie libre doit être nulle ou négative. La variation de l'énergie libre est nulle lorsque la transformation est réversible; la variation de l'énergie libre est négative, lorsque la transformation est irréversible.

CHANGEMENTS D'ÉTAT RÉVERSIBLES.

Lorsqu'un changement d'état est réversible, à une température déterminée et sous une pression déterminée, la variation de l'énergie libre sous pression constante est nulle dans le changement d'état : l'énergie libre sous pression constante de l'unité de poids du corps est la même sous les deux états. On peut déduire de cette propriété l'expression de la chaleur absorbée dans le changement d'état. Nous prendrons comme exemple la vaporisation d'un liquide.

Désignons par p la tension de la vapeur saturée émise par le liquide à la température absolue T , par v et v_1 , les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur, par S et S_1 , les entropies spécifiques du liquide et de la vapeur, par \mathcal{F} et \mathcal{F}_1 , les énergies libres spécifiques sous pression constante du liquide et de la vapeur.

On a la relation

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1.$$

Supposons que la température éprouve un accroissement infiniment petit dT . La tension de la vapeur saturée devient $p + dp$; les énergies libres spécifiques sous pression constante du liquide et de la vapeur deviennent $\mathcal{F} + d\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1 + d\mathcal{F}_1$. On a de même la relation

$$\mathcal{F} + d\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + d\mathcal{F}_1.$$

L'accroissement de l'énergie libre est le même pour le liquide et pour la vapeur,

$$d\mathcal{F} = d\mathcal{F}_1.$$

L'accroissement $d\mathcal{F}$ qu'éprouve l'énergie libre du liquide a pour expression

$$d\mathcal{F} = v dp - ES dT.$$

On a de même, pour la vapeur,

$$d\mathcal{F}_1 = v_1 dp - ES_1 dT.$$

L'accroissement de l'énergie libre est le même pour le liquide et pour la vapeur. En égalant les valeurs de $d\mathcal{F}$ et de $d\mathcal{F}_1$, on a

$$S_1 - S = \frac{1}{E} (\nu_1 - \nu) \frac{dp}{dT}.$$

En appelant L la chaleur de vaporisation du liquide à la température absolue T , on a, d'après la définition de l'entropie,

$$L = (S_1 - S) T.$$

En éliminant l'entropie entre les deux dernières équations, on a finalement

$$L = \frac{1}{E} T (\nu_1 - \nu) \frac{dp}{dT}.$$

On retrouve ainsi l'expression de la chaleur de vaporisation déduite du théorème de Carnot, sous la forme donnée par M. Clausius. Cette relation exprime, dans le langage de l'énergie libre, que l'énergie libre sous pression constante n'éprouve pas de variation dans le changement d'état réversible.

La seconde relation établie par M. Clausius, pour les changements d'état réversibles, est une conséquence immédiate de la définition de l'entropie.

En conservant les notations précédentes, on a la relation

$$S_1 - S = \frac{L}{T}.$$

Si l'on donne à la température T un accroissement infiniment petit dT , on a

$$\frac{dS_1}{dT} - \frac{dS}{dT} = \frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} \quad \text{ou} \quad T \frac{dS_1}{dT} - T \frac{dS}{dT} = \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}.$$

Or $T \frac{dS_1}{dT}$ représente la chaleur spécifique de la vapeur saturée, $T \frac{dS}{dT}$ représente la chaleur spécifique du liquide, en le supposant maintenu sous une pression égale à la tension de la vapeur saturée émise par le liquide à

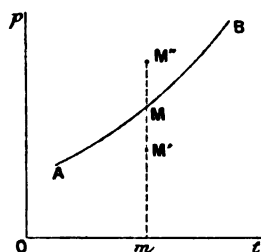
chaque température. On retrouve ainsi l'expression donnée par M. Clausius pour la chaleur spécifique de la vapeur saturée.

Lorsque les changements d'état sont irréversibles, l'énergie libre diminue dans la transformation ; la chaleur absorbée dans la transformation n'est plus égale au produit de la température absolue par l'accroissement de l'entropie.

VAPORISATION.

Si l'on prend pour abscisses les températures, pour ordonnées les tensions de la vapeur saturée, émise par un corps liquide ou solide, la courbe des tensions de vapeur est représentée par la ligne AB (*fig. 1*) ; la ten-

Fig. 1.



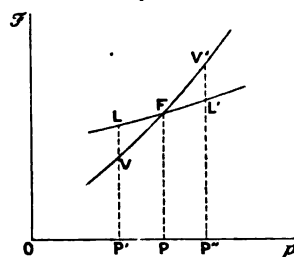
sion de la vapeur croît avec la température. A la température Om la tension de la vapeur saturée est Mm ; au point M la vaporisation est un phénomène réversible. En est-il de même aux points M' et M'' , situés de part et d'autre du point M , sur une parallèle à l'axe des pressions ?

On peut représenter les valeurs de l'énergie libre sous pression constante d'un corps sous un état déterminé, à une température invariable, par les ordonnées des points d'une courbe, ayant pour abscisses les pressions. On aura ainsi, pour la vapeur, une courbe d'énergie libre sous pression constante, pour le liquide une seconde courbe d'énergie libre sous pression constante ; ces deux courbes se rapportent à une même température invariable Om .

Prenons une abscisse OP (*fig. 2*) égale à la tension Mm de la vapeur saturée. Sous cette pression l'énergie libre de la vapeur est égale à l'énergie libre du liquide ; les deux courbes d'énergie libre se coupent au point

F ayant pour abscisse OP. D'ailleurs, pour un même accroissement infiniment petit de pression, les variations de l'énergie libre sont proportionnelles aux volumes occupés par un même poids de vapeur et de liquide. Le volume de la vapeur est supérieur au volume du liquide : l'énergie libre de la vapeur est représentée par la courbe VV' ; l'énergie libre du liquide est représentée par la courbe LI' (*fig. 2*).

Fig. 2.



Prenons une abscisse OP' égale à $M'm$. L'énergie libre du liquide LP' est supérieure à l'énergie libre VP' de la vapeur. Le seul phénomène possible au point M' , sous une pression inférieure à la tension de la vapeur saturée, est la vaporisation du liquide.

Prenons une abscisse OP'' égale à $M''m$. L'énergie libre de la vapeur $V'P''$ est supérieure à l'énergie libre du liquide $L'P''$. Le seul phénomène possible au point M'' , sous une pression supérieure à la tension de la vapeur saturée, est la condensation de la vapeur.

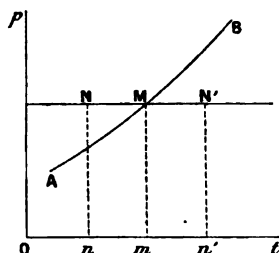
La courbe des tensions de vapeur AB (*fig. 1*) partage ainsi le plan en deux régions qui jouissent de propriétés distinctes. La courbe AB est le lieu des points du plan pour lesquels le changement d'état est réversible : à droite de la courbe AB , le seul phénomène possible est la vaporisation ; à gauche de la courbe AB , le seul phénomène possible est la condensation de la vapeur.

On arrive au même résultat en explorant le plan, non plus suivant une parallèle à l'axe des pressions, mais suivant une parallèle à l'axe des températures.

Soit AB (*fig. 3*) la courbe des tensions de vapeur : les abscisses sont les températures, les ordonnées sont les tensions de vapeur. Menons une

parallèle NN' à l'axe des températures qui coupe la courbe au point M : la tension de la vapeur saturée est Mm à la température Om . Quels sont

Fig. 3.

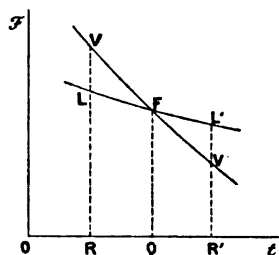


les changements d'état possibles aux points N et N' , situés de part et d'autre du point M , sur une parallèle à l'axe des températures?

On peut représenter les valeurs de l'énergie libre sous pression constante d'un corps sous un état déterminé, sous une pression invariable, par les ordonnées des points d'une courbe, ayant pour abscisses les températures. On aura ainsi, pour la vapeur, une courbe d'énergie libre sous pression constante, pour le liquide une seconde courbe d'énergie libre sous pression constante : ces deux courbes se rapportent à une même pression invariable Mm .

Prenons une abscisse OQ (*fig. 4*) égale à la température d'ébullition

Fig. 4.



Om du liquide sous la pression Mm . Les deux courbes d'énergie libre se coupent au point F , ayant pour abscisse OQ . D'ailleurs, pour un même accroissement infiniment petit de température, les diminutions qu'éprouvent l'énergie libre de la vapeur et l'énergie libre du liquide sont proportionnelles, d'une part, à l'entropie de la vapeur, d'autre part, à l'entropie

du liquide. L'entropie de la vapeur est supérieure à l'entropie du liquide; l'énergie libre de la vapeur est représentée par la courbe VV' ; l'énergie libre du liquide est représentée par la courbe LL' .

Prenons une abscisse OR égale à On . L'énergie libre de la vapeur VR est supérieure à l'énergie libre du liquide LR . Le seul phénomène possible au point N , à une température inférieure à la température d'ébullition du liquide sous la pression Mm , est la condensation de la vapeur.

Prenons une abscisse OR' égale à On' . L'énergie libre du liquide $L'R'$ est supérieure à l'énergie libre de la vapeur $V'R'$. Le seul phénomène possible au point N' , à une température supérieure au point d'ébullition du liquide sous la pression Mm , est la vaporisation du liquide.

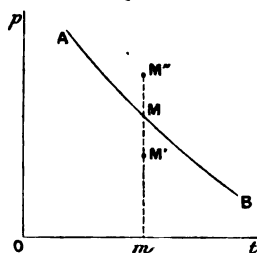
FUSION.

Lorsque la fusion d'un corps solide a lieu avec accroissement de volume, ce qui est le cas ordinaire, on peut répéter à propos de la fusion ce que l'on vient de dire à propos de la vaporisation. C'est un simple changement de termes : il suffit de remplacer le mot *vaporisation* par le mot *fusion*, le mot *vapeur* par le mot *liquide*, le mot *liquide* par le mot *solide* : les conclusions restent les mêmes.

Il convient d'examiner à part le cas où la fusion a lieu avec diminution de volume : c'est le cas de la glace en particulier.

Prenons pour abscisses les températures, pour ordonnées les pressions sous lesquelles la fusion est un phénomène réversible : la courbe de

Fig. 5.



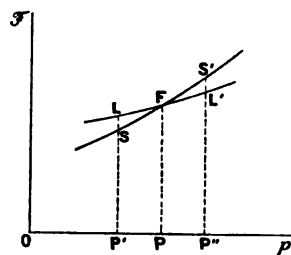
fusion de la glace est représentée par la ligne AB (*fig. 5*); la pression décroît lorsque la température s'élève. A la température Om , la fusion est

un phénomène réversible sous la pression Mm . Quels sont les changements d'état possibles en deux points M' et M'' , situés, de part et d'autre du point M , sur une parallèle à l'axe des pressions?

Nous pouvons représenter, comme on l'a fait pour la vaporisation, par une courbe l'énergie libre sous pression constante de l'eau liquide, par une seconde courbe l'énergie libre sous pression constante de la glace, à la température invariable Om : l'énergie libre de l'eau sous chacun des deux états, liquide ou solide, est une fonction de la pression.

Prenons une abscisse OP (*fig. 6*) égale à Mm . La courbe d'énergie

Fig. 6.



libre du solide et la courbe d'énergie libre du liquide se coupent en un point F , ayant pour abscisse OP . D'ailleurs, pour un même accroissement infiniment petit de pression, les variations d'énergie libre de la glace et de l'eau liquide sont proportionnelles aux volumes occupés par un même poids de glace et d'eau liquide. Le volume de la glace est supérieur au volume de l'eau liquide : l'énergie libre de la glace est représentée par la courbe SS' ; l'énergie libre de l'eau liquide est représentée par la courbe LL' .

Prenons une abscisse OP' égale à $M'm$. L'énergie libre du liquide LP' est supérieure à l'énergie libre de la glace SP' . Le seul phénomène possible au point M' est la congélation de l'eau liquide.

Prenons une abscisse OP'' égale à $M''m$. L'énergie libre de la glace $S'P''$ est supérieure à l'énergie libre de l'eau liquide $L'P''$. Le seul phénomène possible au point M'' est la fusion de la glace.

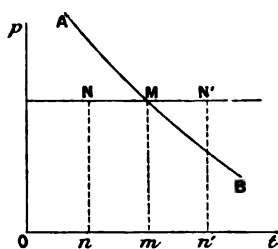
La courbe de fusion AB (*fig. 5*) partage ainsi le plan en deux régions, qui jouissent de propriétés distinctes. La courbe AB est le lieu des points

du plan pour lesquels le changement d'état est réversible : à droite de la courbe AB, le seul phénomène possible est la fusion du corps solide ; à gauche de la courbe AB, le seul phénomène possible est la congélation du liquide.

On arrive au même résultat en explorant le plan, non plus suivant une parallèle à l'axe des pressions, mais suivant une parallèle à l'axe des températures.

Soit AB (*fig. 7*) la courbe de fusion de la glace : les abscisses sont les

Fig. 7.



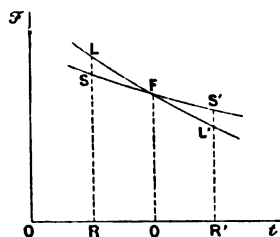
températures, les ordonnées sont les pressions sous lesquelles la fusion est un phénomène réversible. Menons une parallèle NN' à l'axe des températures, qui coupe la courbe au point M : en ce point la fusion est un phénomène réversible sous la pression Mm. Quels sont les changements d'état possibles aux points N et N', situés de part et d'autre du point M, sur une parallèle à l'axe des températures.

Nous pouvons représenter, comme on l'a fait précédemment, l'énergie libre sous pression constante du liquide par une courbe, l'énergie libre sous pression constante du solide par une seconde courbe, en prenant pour abscisses les températures : la pression est invariable et égale à Mm. Ces deux courbes se coupent au point F (*fig. 8*), ayant pour abscisse OQ la température Om. Pour une même variation infiniment petite de la température, les diminutions qu'éprouvent l'énergie libre du liquide et l'énergie libre du solide sont proportionnelles, d'une part, à l'entropie du liquide, d'autre part, à l'entropie du solide. L'entropie du liquide est supérieure à l'entropie du solide : l'énergie libre du liquide est repré-

sentée par la courbe LL' ; l'énergie libre du solide est représentée par la courbe SS' .

Prenons une abscisse OR égale à On . L'énergie libre du liquide LR est

Fig. 8.



supérieure à l'énergie libre du solide SR . Le seul phénomène possible au point N , à une température inférieure au point de fusion, est la solidification du liquide.

Prenons une abscisse OR' égale à On' . L'énergie libre du solide $S'R'$ est supérieure à l'énergie libre du liquide $L'R'$. Le seul phénomène possible au point N' , à une température supérieure au point de fusion, est la fusion du corps solide.

VAPEURS ÉMISES PAR UN MÊME CORPS SOUS DEUX ÉTATS DIFFÉRENTS.

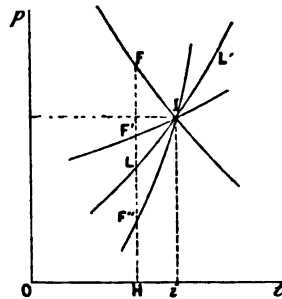
La considération de l'énergie libre permet de démontrer que les vapeurs émises à une même température par un même corps à l'état solide et à l'état liquide possèdent en général des tensions différentes.

Soit LL' (*fig. 9*) la courbe de vaporisation du corps à l'état liquide : les abscisses sont les températures, les ordonnées sont les pressions. Cette courbe coupe la courbe de fusion au point I . La courbe de fusion peut occuper *a priori* trois positions distinctes par rapport à la courbe de vaporisation du liquide.

Considérons une température OH , que nous supposons invariable dans ce qui va suivre; à cette température la tension de vapeur du liquide est LH . Cette droite LH rencontre la courbe de fusion en un point qui peut occuper trois positions distinctes F , F' , F'' . Dans le premier cas,

l'ordonnée FH du point de rencontre F est supérieure à l'ordonnée du point I ; dans le second cas, l'ordonnée $F'H$ est inférieure à l'ordonnée

Fig. 9.



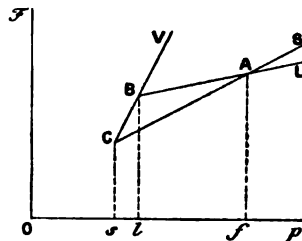
du point I , et supérieure à l'ordonnée du point L ; dans le troisième cas, l'ordonnée $F''H$ est inférieure à l'ordonnée du point L .

Examinons ces trois cas successivement.

Premier cas. — L'ordonnée de la courbe de fusion FI décroît, lorsque la température s'élève; le corps solide en fondant diminue de volume : c'est le cas de la glace.

Prenons une abscisse Of (fig. 10) égale à FH ; menons une ordonnée

Fig. 10.



fA égale à l'énergie libre sous pression constante du corps solide, à la température considérée sous la pression FH . La courbe qui représente l'énergie libre sous pression constante du solide, lorsque la pression varie, ne diffère pas sensiblement, dans une petite étendue, de la tangente à cette courbe au point A ; le coefficient angulaire de cette droite AS est égal au volume du corps solide.

Au point F, situé sur la courbe de fusion, la fusion est un phénomène réversible; l'énergie libre sous pression constante du liquide, est égale à l'énergie libre sous pression constante du corps solide. L'ordonnée fA est égale à l'énergie libre sous pression constante du liquide. La courbe qui représente l'énergie libre du liquide, lorsque la pression varie, ne diffère pas sensiblement, dans une petite étendue, de la tangente à cette courbe au point A; le coefficient angulaire de cette droite AL est égal au volume du liquide.

Prenons une abscisse Ol égale à l'ordonnée LH ou à la tension de vapeur du liquide. L'ordonnée menée par le point l coupe la droite AL au point B. En ce point, l'énergie libre sous pression constante du liquide est égale à l'énergie libre sous pression constante de la vapeur. La courbe qui représente l'énergie libre de la vapeur lorsque la pression varie, ne diffère pas sensiblement, dans une petite étendue, de la tangente à cette courbe au point B; le coefficient angulaire de cette droite BV est égal au volume de la vapeur.

Les coefficients angulaires des trois droites AL, AS, BV vont en croissant; les deux droites BV et AS se coupent au point C, situé au-dessous du point B. L'abscisse Os du point C est inférieure à l'abscisse Ol du point B.

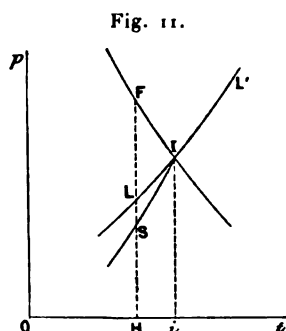
Au point C sous la pression Os , l'énergie libre du corps solide est égale à l'énergie libre de la vapeur; l'abscisse Os représente la tension de la vapeur saturée émise par le corps à l'état solide, à la température considérée.

Ainsi, la vapeur émise par le corps à l'état solide a une tension moindre que la vapeur émise à la même température, par le même corps, à l'état liquide.

On a considéré une température invariable OH et arbitraire. Lorsque cette température se confond avec la température Oi du point I, ou lorsque les deux points F et L se confondent avec le point I, le triangle ABC de la *fig. 10* s'évanouit, la tension de la vapeur émise par le corps à l'état solide devient égale à la tension de la vapeur émise par le corps à l'état liquide. La courbe de vaporisation du solide passe par

le point I; ce point a été désigné par M. J. Thomson sous le nom de *triple point*.

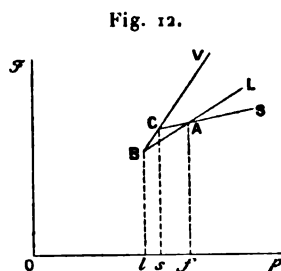
La *fig. 11* représente les positions relatives des trois courbes. La



courbe de fusion est représentée par FI, la courbe de vaporisation du liquide est représentée par LL', la courbe de vaporisation du solide est représentée par SI.

Deuxième cas. — L'ordonnée de la courbe de fusion F'I (*fig. 9*) croît avec la température; le corps solide en fondant augmente de volume.

On peut représenter les énergies libres sous pression constante du solide et du liquide comme on l'a fait dans le cas précédent. Prenons une abscisse Of (*fig. 12*) égale à FH, une ordonnée fA, qui représente l'é-



nergie libre commune au solide et au liquide. L'énergie libre du solide est représentée, dans une petite étendue, par la droite AS; l'énergie libre du liquide est représentée, dans une petite étendue, par la droite AL: le coefficient angulaire de la droite AL est supérieur au coefficient angulaire de la droite AS.

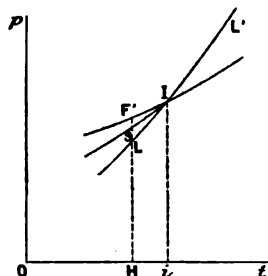
Prenons une abscisse Ol égale à l'ordonnée LH . L'ordonnée menée par le point l coupe la droite AL au point B . En ce point, l'énergie libre du liquide est égale à l'énergie libre de la vapeur. L'énergie libre de la vapeur, dans une petite étendue, est représentée par la droite BV ; le coefficient angulaire de cette droite est supérieur au coefficient angulaire de la droite AL .

Les deux droites AS et BV se coupent au point C . L'abscisse Os de ce point est la tension de la vapeur émise par le corps solide à la température considérée.

La vapeur émise par le corps solide a une tension intermédiaire entre la tension de la vapeur du liquide et la pression sous laquelle la fusion est un phénomène réversible à la même température.

La *fig. 13* représente les positions relatives des trois courbes. La

Fig. 13.



courbe de fusion est représentée par FI , la courbe de vaporisation du liquide est représentée par LL' , la courbe de vaporisation du solide est représentée par SI .

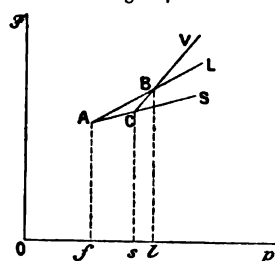
Troisième cas. — Le volume du liquide est également supérieur au volume du solide.

Dans la *fig. 14*, les droites AS , AL , BV représentent les énergies libres du solide, du liquide et de la vapeur. Les deux droites AS et BV se coupent au point C : l'abscisse de ce point est la tension de vapeur du corps à l'état solide.

La vapeur émise par le corps solide a une tension intermédiaire entre

la tension de vapeur du liquide et la pression sous laquelle la fusion est un

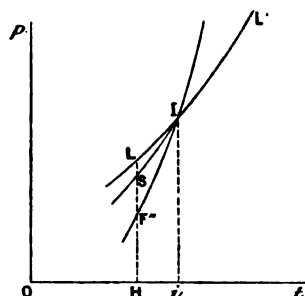
Fig. 14.



phénomène réversible à la même température.

Dans la *fig. 15*, la courbe de fusion est représentée par FI, les courbes

Fig. 15.



de vaporisation du liquide et du solide sont représentées par LL' et SI.

POSITIONS RELATIVES DES TROIS COURBES. — Si l'on jette les yeux sur les *fig. 11*, *13* et *15*, qui représentent les positions relatives de la courbe de fusion et des courbes de vaporisation, on voit qu'en suivant les trois courbes dans le sens où les ordonnées vont en croissant, la courbe de vaporisation du solide occupe une position intermédiaire entre les deux autres courbes.

Cette propriété se présente d'ailleurs comme une conséquence immédiate du théorème de Carnot.

Au triple point, la fusion du solide, la vaporisation du solide et la vaporisation du liquide sont des phénomènes réversibles : le théorème de Carnot est directement applicable à chacun de ces changements d'état.

Si l'on appelle A l'équivalent calorifique du travail, T la température

absolue du triple point, p la pression au triple point, v le volume spécifique du corps solide au triple point, v' le volume spécifique du liquide au triple point, la chaleur de fusion Q a pour expression, d'après le théorème de Carnot,

$$Q = AT(v' - v) \frac{dp}{dt}.$$

Appelons α le coefficient angulaire $\frac{dp}{dt}$ de la courbe de fusion au triple point; dans cette notation

$$Q = AT(v' - v)\alpha.$$

Appelons L la chaleur de vaporisation du solide au triple point, L' la chaleur de vaporisation du liquide au triple point, w le volume spécifique de la vapeur saturée au triple point; désignons par α' le coefficient angulaire de la tangente à la courbe de vaporisation du solide au triple point, par α'' le coefficient angulaire de la tangente à la courbe de vaporisation du liquide au triple point.

Le théorème de Carnot donne deux autres relations

$$L = AT(w - v)\alpha',$$

$$L' = AT(w - v')\alpha''.$$

Les coefficients angulaires α , α' , α'' sont respectivement proportionnels aux fractions

$$\frac{Q}{v' - v}, \quad \frac{L}{w - v}, \quad \frac{L'}{w - v'}.$$

D'ailleurs, au triple point, la chaleur de vaporisation du solide L est égale à la somme de la chaleur de fusion Q et de la chaleur de vaporisation du liquide L' ,

$$L = Q + L'.$$

Le dénominateur $w - v$ de la seconde fraction est égal à la somme des dénominateurs $v' - v$ et $w - v'$ des deux autres fractions.

La seconde fraction dérive des deux autres fractions en ajoutant ces dernières fractions terme à terme. D'après une propriété arithmétique bien connue, la seconde fraction a une valeur comprise entre les deux autres

fractions : au triple point, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe de vaporisation du solide est comprise entre les coefficients angulaires des tangentes menées aux deux autres courbes.

On retrouve ainsi, au moyen du théorème de Carnot, la propriété indiquée au sujet des positions relatives des trois courbes.

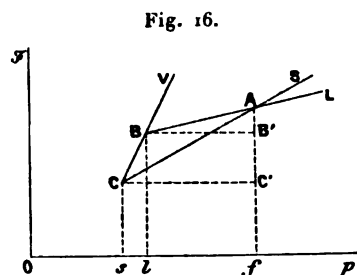
En invoquant le même théorème d'arithmétique, on retrouve facilement cette propriété : si les deux courbes de vaporisation avaient même tangente au triple point, la courbe de fusion aurait également même tangente au triple point. Dans le cas de la glace et de l'eau liquide, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe de fusion au triple point est négatif, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe de vaporisation du liquide est, au contraire, positif.

PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX TROIS COURBES. — Une parallèle à l'axe des pressions menée dans le voisinage du triple point coupe les trois courbes en des points qui jouissent d'une propriété particulière.

Considérons, par exemple, le cas de la glace et de l'eau liquide. Une parallèle à l'axe des pressions menée par le point H (*fig. 11*) coupe la courbe de fusion au point F, la courbe de vaporisation du liquide au point L, la courbe de vaporisation du solide au point S.

Désignons par P , p , p' les pressions HF, HS, HL ou les ordonnées des points des trois courbes qui correspondent à l'abscisse OH.

Prenons des abscisses Of , Os , Ol (*fig. 16*) égales à ces pressions P ,



p , p' . Menons l'ordonnée fA qui représente l'énergie libre sous pression constante commune au solide et au liquide, l'ordonnée lB qui représente

l'énergie libre commune au liquide et à la vapeur, l'ordonnée sC qui représente l'énergie libre commune au solide et à la vapeur.

Désignons par v le volume du solide, par v' le volume du liquide, par w le volume de la vapeur.

La diminution AC' qu'éprouve l'énergie libre du solide en passant de la pression P à la pression p est $v(P - p)$; la diminution AB' qu'éprouve l'énergie libre du liquide en passant de la pression P à la pression p' est $v'(P - p')$; la diminution $B'C'$ qu'éprouve l'énergie libre de la vapeur en passant de la pression p' à la pression p est $w(p' - p)$.

La diminution de l'énergie libre du solide AC' est la somme des diminutions AB' et $B'C'$ des énergies libres du liquide et de la vapeur. On a la relation

$$v(P - p) = v'(P - p') + w(p' - p).$$

Cette relation peut s'écrire

$$(w - v')p' = (v - v')P + (w - v)p.$$

Imaginons au point F (*fig. 11*) un poids égal à $v - v'$ ou à la diminution de volume que le corps éprouve par la fusion. Imaginons au point S un poids égal à $w - v$ ou à l'expansion de volume qu'éprouve le corps solide en se vaporisant. Imaginons au point L un poids égal à $w - v'$ ou à l'expansion de volume qu'éprouve le liquide en se vaporisant.

Le poids $w - v'$ placé au point L est la somme des poids $v - v'$ et $w - v$ placés aux points F et S . D'après la relation précédente, le moment du premier poids par rapport à l'axe des températures est égal à la somme des moments des autres poids par rapport au même axe. *Le point L est le centre de gravité du système des deux poids placés aux points F et S .*

Cette propriété est générale. Si l'on mène une parallèle à l'axe des pressions, le point d'intersection intermédiaire entre les deux autres est celui qui correspond à la variation de volume la plus considérable accomplie dans les divers changements d'état.

Pour que les deux points L et S se confondent ou, en d'autres termes, pour que les deux courbes de tensions de vapeur se confondent, il faut

que le corps solide n'éprouve aucun changement de volume à la suite de la fusion.

Le volume de la vapeur est en général très considérable par rapport aux volumes du solide et du liquide; la propriété précédente montre que les deux courbes de tensions de vapeur doivent être très voisines. La différence entre les deux tensions de vapeur peut se calculer d'après la formule précédente.

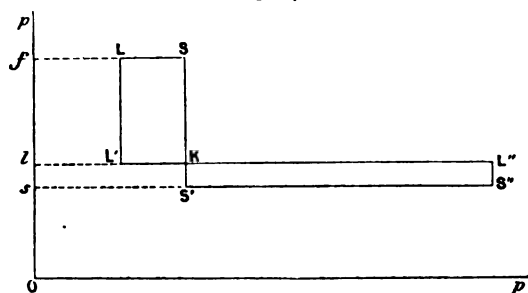
COMPARAISON AVEC LES CYCLES ISOTHERMIQUES. — La considération de l'énergie libre permet de retrouver ainsi les propriétés relatives aux changements d'état irréversibles, qui ont été établies au moyen des cycles isothermiques. L'énergie libre et les cycles isothermiques ont pour origine commune la propriété fondamentale établie par M. Clausius au sujet des cycles non réversibles.

Lorsque l'on traite la question des vapeurs émises à une même température, par un même corps sous deux états différents, en considérant l'influence de la pression sur l'énergie libre sous pression constante, on est ramené aux cycles isothermiques. Cela est facile à voir.

Considérons, par exemple, le cas de l'eau liquide et de la glace. On peut représenter les variations qu'éprouve l'énergie libre de l'eau sous chacun des trois états, par suite d'un changement de pression, en prenant pour abscisses les volumes, et pour ordonnées les pressions.

Prenons sur la *fig. 17* des ordonnées Of , Ol , Os égales aux abscisses

Fig. 17.



de la *fig. 10*. Menons par les points f , l , s des parallèles à l'axe des volumes. Prenons une longueur fS égale au volume du corps solide, une

longueur fL égale au volume du liquide, une longueur lL'' égale au volume de la vapeur.

La diminution qu'éprouve l'énergie libre du corps solide lorsque la pression passe de la valeur Of à la valeur Os est l'aire du rectangle $fSS's$. La diminution qu'éprouve l'énergie libre du liquide lorsque la pression passe de la valeur Of à la valeur Ol est l'aire du rectangle $fLL'l$. La diminution qu'éprouve l'énergie libre de la vapeur lorsque la pression passe de la valeur Ol à la valeur Os est l'aire du rectangle $lL''S''s$.

D'après la relation qui existe entre les diminutions de l'énergie libre du corps sous les trois états, l'aire du premier rectangle est égale à la somme des aires des deux derniers rectangles. En tenant compte des parties communes, l'aire $LSKL'$ est égale à l'aire $KL''S''S'$. Les deux boucles du cycle isothermique $LSS'S''L''L'/L$ ont des aires égales : c'est la condition de réversibilité des cycles isothermiques.

Cette condition de réversibilité équivaut à une relation entre les variations de l'énergie libre du corps sous les trois états. Que l'on parte des cycles isothermiques, que l'on parte de l'énergie libre, on arrive à une même relation entre les pressions et les volumes occupés par le corps sous les trois états.

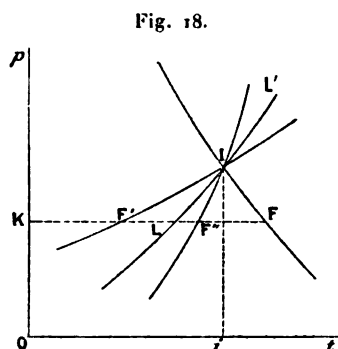
Un changement d'état réversible, fusion ou vaporisation, a lieu à chaque température sous une pression déterminée : la courbe de réversibilité, courbe de fusion ou courbe de vaporisation, divise le plan en deux régions, qui jouissent de propriétés distinctes.

Lorsque l'on veut explorer l'une ou l'autre de ces régions dans une direction parallèle à l'axe des pressions, on peut employer indifféremment deux procédés : on peut recourir à l'énergie libre ou aux cycles isothermiques. Ces deux procédés, différents en apparence, identiques au fond, sont les applications d'un même théorème, qui embrasse tous les cycles irréversibles.

Lorsque l'on veut explorer les deux régions du plan que sépare la courbe de réversibilité, dans une direction parallèle à l'axe des températures, c'est à l'énergie libre qu'il faut s'adresser ; il ne peut plus être question de cycles isothermiques.

Ce second mode d'exploration du plan fournit une nouvelle démonstration de l'inégalité qui existe entre les tensions des vapeurs émises à la même température par un même corps sous deux états différents.

AUTRE MODE DE DISTINCTION DES DEUX COURBES DE VAPORISATION. — Soit LL' (*fig. 18*) la courbe de vaporisation du corps à l'état liquide :



les abscisses sont les températures, les ordonnées sont les pressions. Cette courbe coupe la courbe de fusion au point I. La courbe de fusion peut occuper trois positions distinctes par rapport à la courbe de vaporisation du liquide.

Considérons une pression OK que nous supposons invariable dans ce qui va suivre : sous cette pression la température d'ébullition du liquide est LK . Cette droite LK rencontre la courbe de fusion en un point qui peut occuper trois positions distinctes F , F' , F'' . Dans le premier cas, l'abscisse FK du point de rencontre F est supérieure à l'abscisse du point I ; dans le deuxième cas, l'abscisse $F'K$ est inférieure à l'abscisse du point I ; dans le troisième cas, l'abscisse $F''K$ est inférieure à l'abscisse du point I et supérieure à l'abscisse du point L .

Examinons ces trois cas successivement.

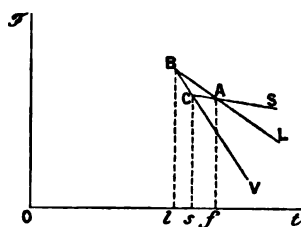
Premier cas. — La courbe de fusion est FI .

Prenons une abscisse Of (*fig. 19*) égale à FK ; menons une ordonnée fA égale à l'énergie libre sous pression constante du corps à l'état solide, sous la pression considérée et à la température FK . La courbe qui représente l'énergie libre sous pression constante du solide, lorsque la

température varie, ne diffère pas sensiblement, dans une petite étendue, de la tangente à cette courbe au point A. Le coefficient angulaire de cette droite AS est égal au produit, changé de signe, de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'entropie du corps solide.

Au point F, situé sur la courbe de fusion, la fusion est un phénomène réversible; l'énergie libre sous pression constante du liquide est égale à

Fig. 19.



l'énergie libre sous pression constante du corps solide. L'ordonnée fA est égale à l'énergie libre sous pression constante du liquide. La courbe qui représente l'énergie libre du liquide, lorsque la température varie, ne diffère pas sensiblement, dans une petite étendue, de la tangente à cette courbe au point A. Le coefficient angulaire de cette droite AL est égal au produit, changé de signe, de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'entropie du liquide.

Prenons une abscisse Ol égale à l'abscisse LK ou à la température d'ébullition du liquide. L'ordonnée menée par le point l coupe la droite AL au point B. En ce point, l'énergie libre sous pression constante du liquide est égale à l'énergie libre sous pression constante de la vapeur. La courbe qui représente l'énergie libre de la vapeur, lorsque la température varie, ne diffère pas sensiblement, dans une petite étendue, de la tangente à cette courbe au point B. Le coefficient angulaire de cette droite BV est égal au produit, changé de signe, de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'entropie de la vapeur.

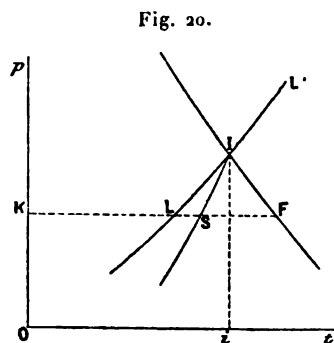
Les entropies de la vapeur, du liquide et du solide vont en diminuant; les coefficients angulaires des trois droites BV, AL, AS vont en croissant. Les deux droites BV et AS se coupent en un point C, situé au-dessous du point B et au-dessus du point A. Au point C, à une température égale à

l'abscisse O_s de ce point, l'énergie libre du corps solide est égale à l'énergie libre de la vapeur. L'abscisse O_s représente la température à laquelle la vaporisation du corps solide est un phénomène réversible sous la pression OK ou la température d'ébullition du solide sous la pression OK .

Ainsi, *la température d'ébullition du solide est intermédiaire entre la température d'ébullition du liquide et la température de fusion du corps solide sous la même pression.*

On a considéré une pression invariable OK et arbitraire. Lorsque cette pression se confond avec la pression Ii au point I , ou lorsque deux points F et L se confondent avec le point I , le triangle ABC de la *fig.* 19 s'évanouit; la tension de la vapeur, émise par le corps à l'état solide, devient égale à la tension de la vapeur émise par le corps à l'état liquide. La courbe de vaporisation du solide passe par le point I : c'est le point désigné par M. J. Thomson sous le nom de *triple point*.

La *fig.* 20 représente les positions relatives des trois courbes. La



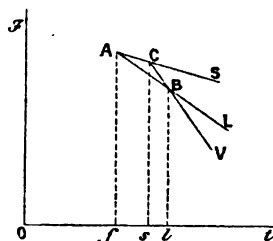
courbe de fusion est représentée par FI ; la courbe de vaporisation du liquide est représentée par LL' ; la courbe de vaporisation du solide est représentée par SI .

Deuxième cas. — La courbe de fusion est $F'I$ (*fig.* 18).

On peut représenter les énergies libres sous pression constante du corps sous les trois états, comme on l'a fait dans le cas précédent. Prenons une abscisse O_f (*fig.* 21) égale à $F'K$, une ordonnée fA qui représente l'énergie libre commune au solide et au liquide. L'énergie libre du solide

est représentée dans une petite étendue par la droite AS; l'énergie libre du liquide est représentée dans une petite étendue par la droite AL.

Fig. 21.



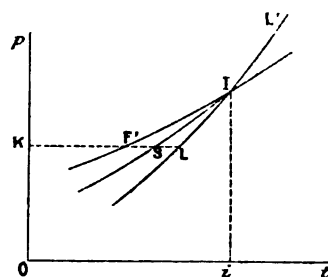
Prenons une abscisse Ol égale à l'abscisse LK . L'ordonnée menée par le point l coupe la droite AL au point B . En ce point, l'énergie libre du liquide est égale à l'énergie libre de la vapeur. L'énergie libre de la vapeur dans une petite étendue est représentée par la droite BV .

Les deux droites AS et BV se coupent au point C . L'abscisse Os de ce point est la température d'ébullition du corps solide sous la pression OK .

Ici encore, *la température d'ébullition du corps solide est intermédiaire entre la température d'ébullition du liquide et la température de fusion du corps solide sous la même pression.*

La fig. 22 représente les positions relatives des trois courbes. La

Fig. 22.



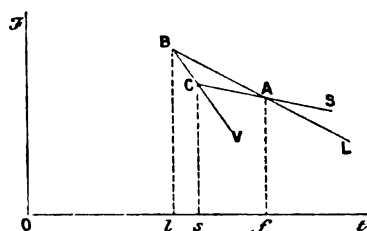
courbe de fusion est représentée par $F'I$; la courbe de vaporisation du liquide est représentée par LL' ; la courbe de vaporisation du solide est représentée par SI .

Troisième cas. — La courbe de fusion est $F''I$ (fig. 18).

Dans la fig. 23 les droites AS , AL et BV représentent les énergies

libres du solide, du liquide et de la vapeur. Les deux droites AS et BV se coupent au point C; l'abscisse de ce point est la température d'ébullition du corps solide sous la pression OK.

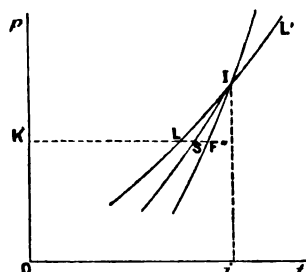
Fig. 23.



Ici encore, la température d'ébullition du solide est intermédiaire entre la température d'ébullition du liquide et la température de fusion du corps solide sous la même pression.

Dans la *fig.* 24, la courbe de fusion est représentée par $F''I$; les courbes

Fig. 24.



de vaporisation du liquide et du solide sont représentées par LL' et SI .

Si l'on jette les yeux sur les *fig.* 20, 22 et 24, qui représentent les positions relatives de la courbe de fusion et des courbes de vaporisation, on voit qu'une parallèle à l'axe des températures coupe ces courbes en trois points, tels que le point d'intersection avec la courbe de vaporisation du solide soit toujours intermédiaire entre les deux autres points d'intersection.

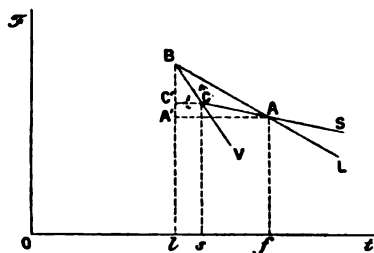
PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX TROIS COURBES. — Une parallèle à l'axe des températures, menée dans le voisinage du triple point, coupe les trois courbes en des points qui jouissent d'une propriété particulière.

Considérons, par exemple, le cas de l'eau liquide et de la glace. Une parallèle à l'axe des températures, menée par le point K (*fig. 20*), coupe la courbe de fusion au point F, la courbe de vaporisation du solide au point S, la courbe de vaporisation du liquide au point L.

Désignons par T , t , t' les trois températures KF, KS, KL ou les abscisses des points des trois courbes qui correspondent à l'ordonnée OK.

Prenons les abscisses Of , Ol , Os (*fig. 25*) égale à ces températures T ,

Fig. 25.



t , t' . Menons l'ordonnée fA qui représente l'énergie libre sous pression constante commune au solide et au liquide, l'ordonnée lB qui représente l'énergie libre commune au liquide et à la vapeur, l'ordonnée sC qui représente l'énergie libre commune au solide et à la vapeur.

Menons par les points A et C des parallèles à l'axe des températures qui coupent l'ordonnée du point B aux points A' et C' . L'énergie libre sous pression constante du liquide, en passant de la température T à la température t' , éprouve l'accroissement BA' ; l'énergie libre du solide, en passant de la température T à la température t , éprouve l'accroissement $A'C'$; l'énergie libre de la vapeur, en passant de la température t à la température t' , éprouve l'accroissement $C'B$. Le premier de ces accroissements $A'B$ est la somme des deux autres, $A'C'$ et $C'B$.

Désignons par S , S' , S'' les entropies du solide, du liquide et de la vapeur au triple point.

La pression OK est très voisine de la pression l_i au triple point; les variations des énergies libres, dont il vient d'être question, ont pour valeurs respectives, en appelant E l'équivalent mécanique de la

chaleur,

$$A'B = ES' (T - t'),$$

$$A'C' = ES (T - t),$$

$$C'B = ES'' (t - t').$$

La variation de l'énergie libre du liquide est la somme des variations des énergies libres du solide et de la vapeur. On a la relation

$$S'(T - t') = S(T - t) + S''(t - t').$$

Cette relation peut s'écrire

$$(S'' - S)t = (S' - S)T + (S'' - S')t'.$$

Désignons, comme précédemment, par Q la chaleur de fusion au triple point, par L la chaleur de vaporisation du solide au triple point, par L' la chaleur de vaporisation du liquide au triple point; désignons, en outre, par θ la température absolue du triple point.

On a, d'après la définition de l'entropie, les relations

$$Q = \theta(S' - S),$$

$$L = \theta(S'' - S),$$

$$L' = \theta(S'' - S').$$

La relation précédente peut s'écrire

$$Lt = QT + L't'.$$

Imaginons au point F (*fig. 20*) un poids égal à Q ou à la chaleur de fusion; imaginons au point L un poids égal à L' ou à la chaleur de vaporisation du liquide; imaginons au point S un poids égal à L ou à la chaleur de vaporisation du solide.

Le poids L , placé au point S , est la somme des poids Q et L' placés aux points F et L . D'après la relation précédente, le moment du premier poids L , par rapport à l'axe des pressions, est égal à la somme des moments des deux autres poids Q et L' par rapport au même axe. *Le point S*

est le centre de gravité du système des deux poids placés aux points F et L.

Cette propriété est générale. Si l'on mène une parallèle à l'axe des températures, le point d'intersection intermédiaire entre les deux autres est situé sur la courbe de vaporisation du solide.

Pour que les deux points L et S se confondent, ou, en d'autres termes, pour que les deux courbes de tensions de vapeur se confondent, il faut que la chaleur de fusion soit nulle.

La chaleur de vaporisation est, en général, beaucoup plus grande que la chaleur de fusion; la propriété précédente montre que l'intervalle entre les deux courbes de vaporisation, compté parallèlement à l'axe des températures, doit être beaucoup moindre que l'intervalle entre la courbe de vaporisation du solide et la courbe de fusion. Les deux courbes de vaporisation sont d'ailleurs plus espacées, en général, par rapport à la courbe de fusion dans la direction parallèle à l'axe des températures que dans la direction parallèle à l'axe des pressions.

VAPORISATION DES DISSOLVANTS.

La solution aqueuse d'un corps solide, d'un sel par exemple, émet de la vapeur d'eau dont la tension est inférieure à la tension de la vapeur émise par l'eau pure à la même température : la différence entre les deux tensions de vapeur est d'autant plus grande que la dissolution est plus concentrée. Cette propriété est une conséquence de la théorie de l'énergie libre.

M. Helmholtz, dans ses recherches sur la *Thermodynamique des phénomènes chimiques*, a montré le rôle important que joue la considération de l'énergie libre dans l'étude des dissolutions. La théorie de M. Helmholtz conduit immédiatement à l'explication de la diminution progressive qu'éprouve la tension de la vapeur, émise par un dissolvant, à mesure que la dissolution est de plus en plus concentrée.

L'énergie libre d'une dissolution, à une température déterminée, dépend à la fois du poids du corps solide dissous et du poids du dissol-

vant. Ce n'est pas à cette fonction elle-même, mais plutôt aux variations de cette fonction qu'il faut s'adresser pour suivre les transformations isothermiques que la dissolution peut éprouver.

Concevons, à une température invariable, une dissolution contenant un poids d'eau M et un poids m d'un corps solide, d'un sel par exemple. La concentration h de la dissolution est le rapport du poids m de sel dissous au poids M de l'eau qui sert à la dissoudre,

$$h = \frac{m}{M}.$$

A une certaine température et sous une certaine pression, l'énergie libre sous pression constante \mathcal{F} de la dissolution est une fonction de m et de M .

Si l'on ajoute à la dissolution un poids infiniment petit de sel dm , l'énergie libre de la dissolution éprouve une variation infiniment petite, que l'on peut représenter par $F(h) dm$, en désignant par $F(h)$ une fonction qui dépend de la concentration. Cette fonction est la dérivée partielle de l'énergie libre \mathcal{F} par rapport à m ,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dm} = F(h).$$

La fonction $F(h)$ varie avec la concentration de la dissolution dans un sens facile à déterminer, d'après les propriétés ordinaires des dissolutions.

Supposons que la dissolution de concentration h soit en contact avec le corps solide, capable de se dissoudre dans l'eau. La dissolution d'une nouvelle quantité du corps solide, à la température invariable que l'on considère, doit être accompagnée d'une diminution de l'énergie libre du système, composé de la dissolution et du corps solide en contact avec la dissolution.

Lorsque le poids infiniment petit dm de sel solide se dissout, l'énergie libre de la dissolution éprouve l'accroissement $F(h) dm$. Si l'on désigne par \mathcal{F} , l'énergie libre du corps solide, sous l'unité de poids, la dissolu-

tion du poids de sel dm a déterminé une diminution de l'énergie libre du solide égale à $\mathcal{F}_s dm$. L'accroissement de l'énergie libre du système est

$$[F(h) - \mathcal{F}_s] dm.$$

Pour que la dissolution puisse s'effectuer, il faut que cet accroissement soit négatif, ou que la fonction $F(h)$ soit inférieure à l'énergie libre \mathcal{F}_s de l'unité de poids du corps solide,

$$F(h) < \mathcal{F}_s.$$

La quantité \mathcal{F}_s est invariable à une même température. Lorsque la fonction $F(h)$ est égale à \mathcal{F}_s , la saturation est atteinte; si la fonction $F(h)$ était supérieure à \mathcal{F}_s , la dissolution serait alors sursaturée: le seul phénomène possible est alors la précipitation d'une partie du sel dissous.

Ainsi la fonction $F(h)$ est toujours inférieure à \mathcal{F}_s tant que le sel peut se dissoudre; cette fonction $F(h)$ atteint la plus grande valeur \mathcal{F}_s , lorsque la dissolution est saturée. La fonction $F(h)$ croît avec la concentration de la dissolution.

Si l'on ajoute à la dissolution de concentration h un poids d'eau infiniment petit dM , l'énergie libre de la dissolution éprouve une variation infiniment petite que l'on peut représenter par $G(h) dM$, en désignant par $G(h)$ une fonction qui dépend de la concentration. Cette fonction est la dérivée partielle de l'énergie libre de la dissolution \mathcal{F} par rapport à M ,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dM} = G(h).$$

Cette fonction $G(h)$ est liée d'une manière simple à l'énergie libre de la vapeur émise par la dissolution.

Supposons, en effet, qu'un poids d'eau infiniment petit dM se sépare de la dissolution à l'état de vapeur saturée. L'énergie libre de la dissolution éprouve une diminution égale à $G(h) dM$; en même temps l'énergie libre de la vapeur éprouve l'accroissement $\mathcal{F}_v dM$, en appelant \mathcal{F}_v l'énergie libre, sous l'unité de poids, de la vapeur saturée émise par la dissolution.

L'énergie libre du système formé par la dissolution et sa vapeur en contact avec la dissolution est

$$[-G(h) + \mathcal{F}_2] dM.$$

La formation de la vapeur saturée est un phénomène réversible, la variation qu'éprouve l'énergie libre du système est nulle. On a la relation

$$G(h) = \mathcal{F}_2.$$

La quantité \mathcal{F}_2 est l'énergie libre spécifique de la vapeur émise par la dissolution de concentration h à la température invariable que l'on considère : cette vapeur a une tension ϖ qui dépend de la concentration.

Lorsque la concentration varie infiniment peu et devient $h + dh$, la tension de la vapeur saturée émise par la dissolution devient $\varpi + d\varpi$. Les fonctions $G(h)$ et \mathcal{F}_2 éprouvent des accroissements égaux,

$$dG(h) = d\mathcal{F}_2.$$

Mais $d\mathcal{F}_2$ est l'accroissement infiniment petit qu'éprouve l'énergie libre sous pression constante de la vapeur lorsque la pression passe de la valeur ϖ à la valeur $\varpi + d\varpi$, qui correspond à la nouvelle concentration $h + dh$. L'accroissement $d\mathcal{F}_2$ de l'énergie libre sous pression constante est égal au produit du volume spécifique de la vapeur par l'accroissement de la pression.

En appelant ν le volume spécifique de la vapeur à la température considérée et sous la pression ϖ ,

$$d\mathcal{F}_2 = \nu d\varpi.$$

On en déduit la relation

$$dG(h) = \nu d\varpi.$$

Les accroissements infiniment petits des deux fonctions $F(h)$ et $G(h)$ sont liés à la concentration de la dissolution par une relation très simple.

Prenons la dérivée de la première fonction par rapport à M , la dérivée

de la seconde fonction par rapport à m . On a les deux équations

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{dm dM} = \frac{dF(h)}{dM} = \frac{dF(h)}{dh} \frac{dh}{dM},$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{dM dm} = \frac{dG(h)}{dm} = \frac{dG(h)}{dh} \frac{dh}{dm}.$$

L'ordre des dérivations est arbitraire. On déduit des deux équations précédentes la relation

$$\frac{dF(h)}{dh} \frac{dh}{dM} = \frac{dG(h)}{dh} \frac{dh}{dm}.$$

Si l'on suppose m constant dans la relation qui définit la concentration, on a

$$\frac{dh}{dM} = - \frac{m}{M^2} = - \frac{h}{M}.$$

Si l'on suppose de même M constant dans la relation qui définit la concentration, on a

$$\frac{dh}{dm} = \frac{1}{M}.$$

En reportant ces deux dernières valeurs dans la relation précédente, on a la nouvelle relation

$$h \frac{dF(h)}{dh} + \frac{dG(h)}{dh} = 0.$$

Lorsque la concentration varie, les deux fonctions $F(h)$ et $G(h)$ varient en sens contraire : l'une des fonctions croît, l'autre fonction décroît. On a vu que la première de ces deux fonctions $F(h)$ augmente avec la concentration ; par conséquent la seconde fonction $G(h)$ diminue lorsque la concentration augmente. D'après l'expression trouvée pour $dG(h)$, il s'ensuit que la tension ϖ de la vapeur émise par la dissolution, à une température déterminée, décroît à mesure que la concentration augmente.

CONGÉLATION DES DISSOLVANTS.

Il y a près d'un siècle, Blagden a indiqué une propriété des dissolutions aqueuses. Lorsque l'on abandonne au refroidissement une dissolution d'un sel dans l'eau, on observe la formation au-dessous de zéro d'une certaine quantité de glace; l'abaissement du point de congélation est, en général, proportionnel à la concentration de la dissolution (¹).

Les expériences de Despretz (²), de M. Dufour (³), de M. Rudorff (⁴), de M. de Coppet (⁵), de M. Raoult (⁶) ont confirmé l'exactitude de la loi de Blagden, dans le cas de dissolutions très étendues, où les substances dissoutes n'éprouvent pas d'altération au contact de l'eau.

La glace formée dans la dissolution renferme ordinairement des traces du sel dissous; une partie de l'eau paraît se séparer de la dissolution saline, à l'état de glace, en entraînant dans la cristallisation des traces de sel. Les précipités qui se forment au sein des liquides peuvent entraîner dans leur formation des traces de matière contenue dans la liqueur; la présence des traces de sel dans la glace formée au sein d'une dissolution peut être attribuée à un entraînement mécanique analogue.

La loi de Blagden paraît devoir se rattacher à la différence qui existe entre les tensions des vapeurs émises par l'eau liquide et par la glace à une même température.

POINT DE CONGÉLATION. — Le point de fusion d'un corps solide est la

(¹) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, t. LXXVIII, p. 277; 1788.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. V, p. 19; 1837.

(³) *Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles*, n° 47; 1860.

(⁴) *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 427; 1860. — *Poggendorff's Annalen*, t. CXIV, p. 63; t. CXVI, p. 55; t. CXXII, p. 337; 1861-1864. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LXIII, p. 488.

(⁵) *Annales de Chimie et de Physique*, 4^e série, t. XXIII, p. 366, 1871; t. XXV, p. 502; t. XXVI, p. 98; 1872.

(⁶) *Annales de Chimie et de Physique*, 5^e série, t. XXVIII, p. 133; 1883. — 6^e série, t. II, p. 66, 1884; t. IV, p. 401, 1885; t. VIII, p. 289, 1886. — *Journal de Physique théorique et appliquée*, 2^e série, t. III, p. 16; 1884.

température à laquelle la fusion est un phénomène réversible. Le point d'ébullition d'un liquide est la température à laquelle la vaporisation du liquide est un phénomène réversible. De même, le point de congélation d'un dissolvant est la température à laquelle la congélation du dissolvant est un phénomène réversible.

Concevons une dissolution saline en contact avec la vapeur saturée émise par le dissolvant au point de congélation.

Supposons qu'un poids infiniment petit dM de dissolvant se sépare à l'état de glace. La congélation est un phénomène réversible; au point de congélation, la diminution qu'éprouve l'énergie libre de la dissolution par suite de la séparation du poids d'eau dM est égale à l'énergie libre du poids de glace dM .

Supposons que le même poids d'eau infiniment petit dM se sépare de la dissolution à l'état de vapeur saturée. La vaporisation de la dissolution est un phénomène réversible; dans ces conditions, la diminution qu'éprouve l'énergie libre de la dissolution par suite de la séparation du poids d'eau dM est égale à l'énergie libre du poids dM de la vapeur saturée émise par la dissolution.

Par suite, au point de congélation, l'énergie libre du poids de glace dM est égale à l'énergie libre du même poids dM de vapeur saturée : l'évaporation de la glace est alors un phénomène réversible. *Le point de congélation du dissolvant est la température à laquelle la vapeur saturée émise par la glace a une tension égale à la tension de vapeur de la dissolution.*

En d'autres termes, *le point de congélation d'un dissolvant est la température d'ébullition du dissolvant à l'état solide sous une pression égale à la tension de vapeur de la dissolution.*

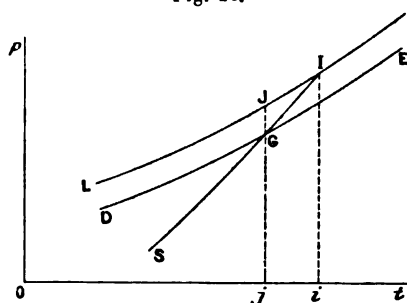
Soient LI (*fig. 26*) la courbe de vaporisation de l'eau liquide à l'état de pureté, SI la courbe de vaporisation de la glace; les abscisses sont les températures, les ordonnées sont les tensions des vapeurs saturées émises par l'eau pure sous chacun des deux états, solide et liquide. Ces deux courbes se coupent au triple point I.

Soit, en outre, DE la courbe des tensions de la vapeur d'eau saturée

émise par une dissolution saturée; cette courbe DE est au-dessous de la courbe LI des tensions de la vapeur d'eau pure. La courbe DE rencontre la courbe IS au point G; l'abscisse Oj de ce point est la température de congélation du dissolvant ou le point de congélation de l'eau servant de dissolvant.

L'abscisse Oi du triple point est la température de congélation de l'eau

Fig. 26.



pure. La différence des abscisses Oi et Oj ou ij est l'abaissement du point de congélation, qui résulte de la présence du corps solide dissous.

La théorie de l'énergie libre permet de suivre facilement les phénomènes qui peuvent se présenter de part et d'autre du point de congélation, au point de vue de la congélation du dissolvant, lorsque la dissolution est maintenue, à diverses températures, sous une pression constamment égale à la tension de la vapeur saturée émise par la dissolution. Le point figuratif suit alors la courbe de vaporisation DE de la dissolution.

Considérons d'abord la portion GE de cette courbe. Examinons les phénomènes qui peuvent se produire en un point de cette courbe, à une température invariable.

Supposons qu'un poids infiniment petit dM du dissolvant se transforme en vapeur saturée. Le phénomène est réversible, la diminution qu'éprouve l'énergie libre de la dissolution par suite de la séparation du poids d'eau dM est égale à l'énergie du même poids dM de la vapeur saturée émise par la dissolution.

Dans la région GE, la vapeur d'eau émise par la dissolution ne peut se condenser à l'état de glace, cela résulte d'une propriété établie précé-

demment. L'énergie libre de la vapeur est inférieure à l'énergie libre de la glace, sous le même poids.

La diminution qu'éprouve l'énergie libre de la dissolution par suite de la séparation d'un poids d'eau dM est, par suite, inférieure à l'énergie libre du même poids de glace. La congélation d'une partie du dissolvant ne peut avoir lieu qu'avec une diminution de l'énergie libre du système; la congélation du dissolvant est donc impossible en tout point de la portion de courbe GE ou à toute température supérieure au point de congélation.

Considérons de même la portion GD de la courbe de vaporisation de la dissolution. Examinons également les phénomènes qui peuvent se produire en un point de cette courbe, à une température invariable.

Supposons qu'un poids infiniment petit dM du dissolvant se transforme en vapeur saturée. Le phénomène est réversible, la diminution qu'éprouve l'énergie libre de la dissolution par suite de la séparation du poids d'eau dM est égale à l'énergie libre du même poids dM de la vapeur saturée émise par la dissolution.

La vapeur d'eau saturée émise par la dissolution peut se condenser à l'état de glace, à la température considérée. Cette condensation de la vapeur est un phénomène irréversible, l'énergie libre de la vapeur est supérieure à l'énergie libre de la glace sous le même poids.

La diminution qu'éprouve l'énergie libre de la dissolution par suite de la séparation d'un poids d'eau dM est par suite supérieure à l'énergie libre du même poids de glace. La congélation du dissolvant est alors possible en tout point de la portion de courbe GD, ou à toute température inférieure au point de congélation.

Le point de congélation d'un dissolvant jouit d'une propriété analogue à celle du point de fusion d'un corps solide : *le point de congélation d'un dissolvant est la température la plus élevée à laquelle puisse se produire la congélation du dissolvant.*

Blagden avait reconnu que le contact d'une parcelle de glace avec une dissolution saline refroidie au-dessous de son point de congélation entraîne

toujours la formation de la glace. C'est à Blagden qu'il faut faire remonter l'origine de la méthode employée pour déterminer le point de congélation d'un dissolvant. La théorie précédente en donne aisément la raison.

LOI DE BLAGDEN. — Il est facile de retrouver la loi de Blagden dans le cas de dissolutions très étendues. L'abaissement du point de congélation est alors très faible.

Dans une petite étendue de l'échelle thermométrique, la courbe de vaporisation de la glace et la courbe de vaporisation de l'eau pure peuvent être considérées comme des lignes droites. A une même température, d'après les expériences de M. Wüllner, la différence des ordonnées des deux courbes LI et DE est proportionnelle à la concentration de la dissolution; la courbe de vaporisation de la dissolution, dans une petite étendue de l'échelle thermométrique, peut être considérée comme une ligne droite, parallèle à la ligne droite qui correspond à la vaporisation de l'eau pure.

L'abaissement du point de congélation est ji . Cette longueur est proportionnelle à la droite GI. Cette droite GI est elle-même proportionnelle à la droite GJ, c'est-à-dire à la différence des ordonnées de deux points J et G des courbes LI et DE, qui ont une même abscisse Oj. A une même température, la différence des tensions de vapeurs de l'eau pure et de la dissolution est proportionnelle à la concentration de la dissolution. Par suite, l'abaissement du point de congélation du dissolvant est proportionnel à la concentration de la dissolution, lorsque la dissolution est très étendue.

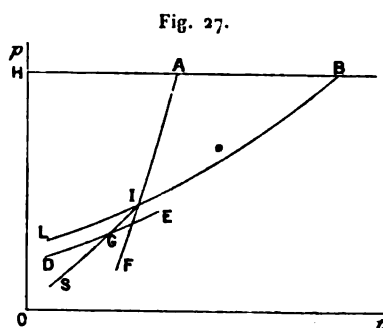
La loi de Blagden se présente ici avec le caractère d'une loi limite, d'autant plus exacte que les dissolutions sont plus étendues.

L'eau n'est pas le seul dissolvant qui éprouve un abaissement du point de congélation. M. Raoult a retrouvé la même propriété, en prenant pour dissolvants la benzine, la nitrobenzine, le bibromure d'éthylène, l'acide formique et l'acide acétique. Peut-on appliquer à ces nouveaux dissolvants l'explication que l'on vient de donner à propos de l'eau?

Prenons pour abscisses les températures, pour ordonnées les pressions.

Prenons une ordonnée OH (*fig. 27*) qui représente la pression de l'atmosphère, menons par le point H une parallèle à l'axe des températures ; prenons sur cette parallèle des longueurs HA et HB, qui représentent la température de fusion du dissolvant solide et la température d'ébullition du dissolvant liquide sous la pression de l'atmosphère.

L'un des dissolvants dont il s'agit augmente de volume par la fusion, l'ordonnée d'un point de la courbe de fusion croît avec la température.



L'influence de la pression sur la température de la fusion est, en général, assez faible ; la courbe de fusion AF descend rapidement à mesure que la température s'abaisse.

La courbe de vaporisation du liquide est une courbe BL, dont l'ordonnée décroît à mesure que la température s'abaisse, mais beaucoup plus lentement que sur la courbe de fusion.

Ces deux courbes se coupent au triple point I. La courbe de vaporisation du dissolvant à l'état solide passe par le triple point ; cette courbe SI est intermédiaire entre les deux autres courbes LI et FI. La courbe de vaporisation du dissolvant à l'état solide est au-dessous de la courbe de vaporisation du dissolvant à l'état liquide ; la position relative de ces deux courbes est la même que dans le cas de l'eau.

On peut répéter ici ce que l'on a dit à propos de l'eau : la loi de Blagden se présente également comme une loi limite.

INFLUENCE DU CORPS DISSOUS ET DU DISSOLVANT. — M. de Coppet a signalé une propriété remarquable. Lorsque l'on dissout dans un même poids d'eau des poids équivalents de diverses substances appartenant à

une même série, les abaissements du point de congélation sont les mêmes pour ces diverses solutions. Ainsi, par exemple, l'abaissement du point de congélation est le même pour les dissolutions qui renferment, dans un même poids d'eau, des poids équivalents de chlorure, de bromure ou d'iodure de potassium.

Est-il possible de rendre compte de cette propriété dans la théorie de l'énergie libre?

L'énergie libre d'une dissolution dépend de l'énergie libre du dissolvant et de l'énergie libre du corps solide. Ici le poids de l'eau ou du dissolvant est constant, l'énergie libre du dissolvant est invariable. Si l'on dissout successivement, dans un même poids d'eau, divers corps solides, tels que l'énergie libre de ces corps ait la même valeur, on doit s'attendre à ce que l'énergie libre de la dissolution soit la même; dans ce cas, la tension de la vapeur d'eau émise par ces diverses solutions sera la même, et l'abaissement du point de congélation conserve la même valeur.

Or, d'après les propriétés des fonctions caractéristiques indiquées par M. Massieu, à une même valeur de la fonction caractéristique ou de l'énergie libre correspondent des valeurs égales pour les divers éléments spécifiques, volume spécifique, coefficients de dilatation, coefficient de compressibilité, chaleurs spécifiques. L'égalité, entre ces divers coefficients caractérise les corps qui appartiennent à une même série. La propriété établie par les expériences de M. de Coppet se présente ici comme une conséquence de la théorie de l'énergie libre : cette proposition a même une contre-partie.

Supposons que l'on dissolve un poids constant d'un même corps solide dans des poids équivalents de divers liquides appartenant à une même série; l'énergie libre de chaque dissolvant est alors invariable, l'énergie libre du corps solide est la même, l'abaissement du point de congélation est alors le même pour les diverses solutions.

M. Raoult a reconnu, avant tout essai de théorie, que l'abaissement du point de congélation est indépendant de la nature du dissolvant lorsque l'on dissout le même poids d'un corps solide dans des poids équivalents

des cinq liquides suivants : la benzine, la nitrobenzine, le bibromure d'éthylène, l'acide formique, l'acide acétique. L'eau, au contraire, fait exception; les conditions précédentes peuvent en donner la raison: l'eau ne fait pas partie de la même série que les autres dissolvants.

M. Raoult a montré récemment (1) qu'il existe une grande analogie entre l'abaissement du point de congélation des dissolvants et la diminution des tensions de vapeur.

Au point de vue de l'abaissement des points de congélation, ou, ce qui revient au même, de la diminution qu'éprouvent les tensions de vapeur des dissolutions, une loi simple, telle que l'égalité des abaisséments du point de congélation, semble se rapporter uniquement aux cas où les corps solides appartiennent à une même série, où les dissolvants appartiennent à une même série. Si l'on veut trouver des lois simples, il faut distribuer les corps solides par séries, il faut distribuer les dissolvants par séries; il en est de même lorsque l'on veut appliquer la loi de Dulong et Petit aux divers composés, en prenant les chaleurs spécifiques vulgaires.

Les relations simples qui existent entre les abaisséments des points de congélation se présentent ici avec le même caractère que l'isomorphisme. La détermination du poids moléculaire d'un corps solide ou d'un dissolvant, fondée sur la loi de Blagden et ses conséquences, suppose que l'on connaisse *a priori* la série à laquelle appartient le corps dont on cherche le poids moléculaire. Inversement, la congélation des dissolvants, comme l'isomorphisme, peut fournir des indications utiles sur la place que doit occuper un corps dans la Chimie.

DISSOLUTION DES GAZ DANS LES LIQUIDES.

La dissolution d'un gaz dans un liquide, à température constante, est nécessairement accompagnée d'une diminution de l'énergie libre du système formé par la dissolution et par le gaz qui fait atmosphère au-dessus de la dissolution.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 1430; 1887.

Concevons un liquide en contact avec un gaz qui puisse s'y dissoudre; supposons que le volume de l'enceinte soit invariable et que la température soit également invariable. Tant que l'énergie libre sous volume constant du système pourra diminuer à la suite d'une modification élémentaire éprouvée par le système, une nouvelle quantité de gaz pourra se dissoudre. La dissolution sera saturée, l'équilibre sera établi lorsque l'énergie libre sous volume constant du système sera minimum.

La vapeur émise par le liquide est sans influence, elle peut être négligée. L'énergie libre sous volume constant du système se compose de deux parties, l'énergie libre du gaz non dissous et l'énergie libre du gaz dissous, rapporté au volume du liquide. Chacune de ces énergies libres peut s'exprimer au moyen d'une formule simple, lorsque le gaz suit la loi de Mariotte.

Désignons par f l'énergie libre sous volume constant de l'unité de poids d'un corps à une certaine température, par v le volume spécifique du corps, par p la pression. Lorsque le volume spécifique passe de la valeur v à la valeur infiniment voisine $v + dv$ à la même température, l'accroissement de l'énergie libre sous volume constant a pour valeur

$$df = - p dv.$$

Lorsqu'il s'agit d'un gaz soumis à la loi de Mariotte, le produit $p v$ a une valeur invariable à une même température. En désignant par r une quantité constante propre au gaz

$$p v = r,$$

$$df = - r \frac{dv}{v}.$$

Si l'on désigne par h une quantité constante qui se rapporte à un état initial, choisi arbitrairement, l'énergie libre sous volume constant a pour expression, en fonction du volume v ,

$$f = h - r \log v.$$

Appliquons cette formule générale à la dissolution d'un gaz dans un liquide.

Une enceinte de volume invariable, à une température invariable, ren-

ferme un volume liquide V en contact avec un gaz : m est le poids de gaz dissous. Le gaz non dissous a un poids m_1 ; ce gaz occupe le volume V_1 .

Si l'on suppose que le gaz dissous occupe seul le volume V du liquide dissolvant, le volume spécifique de gaz est $\frac{V}{m}$. L'énergie libre sous volume constant du gaz dissous, rapporté au volume du dissolvant, est de la forme

$$m \left(h + r \log \frac{m}{V} \right),$$

en désignant par h une quantité constante, propre au gaz dissous.

Le volume spécifique du gaz non dissous est $\frac{V_1}{m_1}$; l'énergie libre sous volume constant du gaz non dissous est

$$m_1 \left(h_1 + r \log \frac{m_1}{V_1} \right),$$

en désignant par h_1 une quantité constante propre au gaz non dissous.

L'énergie libre sous volume constant f du système formé par le gaz dissous et le gaz non dissous est la somme de ces deux énergies libres : elle doit être minimum pour l'équilibre.

Supposons maintenant une modification élémentaire du système. Désignons par dm et dm_1 les variations infiniment petites qu'éprouvent le poids de gaz dissous et le poids de gaz non dissous. Les volumes V et V_1 restent les mêmes ; la variation de l'énergie libre du système a pour expression

$$df = \left(h + r \log \frac{m}{V} \right) dm + \left(h_1 + r \log \frac{m_1}{V_1} \right) dm_1 + r(dm + dm_1).$$

Le poids total du gaz contenu dans l'enceinte reste le même

$$dm + dm_1 = 0.$$

La variation infiniment petite de l'énergie libre peut se mettre sous la forme

$$df = \left(h - h_1 + r \log \frac{m}{V} \frac{V_1}{m_1} \right) dm.$$

Cette variation est nulle pour l'équilibre. La condition d'équilibre est

finalement

$$\frac{\frac{m}{V}}{\frac{m_1}{V_1}} = \text{const.}$$

La fraction $\frac{m}{V}$ est le poids de l'unité de volume du gaz dissous, en supposant que le gaz occupe le volume entier de la dissolution. La fraction $\frac{m_1}{V_1}$ est le poids spécifique du gaz non dissous.

La condition d'équilibre peut s'exprimer ainsi : *A une température déterminée, il existe un rapport constant entre la densité du gaz dissous, rapporté au volume de la dissolution, et la densité du gaz non dissous.*

On retrouve ainsi, sous une de ses formes, la loi de solubilité d'un gaz dans un liquide. Le rapport constant dont il s'agit est le coefficient de solubilité du gaz dans le liquide.

Au lieu d'un seul gaz, on peut avoir un mélange gazeux en contact avec le liquide. La solubilité d'un mélange gazeux se traite de la même manière que la solubilité d'un gaz unique, l'énergie libre d'un mélange gazeux est la somme des énergies libres des gaz mélangés.

La variation de l'énergie libre du système, à la suite d'une modification élémentaire apportée à l'état du système, est alors une somme de termes de la forme df ; chacun de ces termes contient un facteur dm relatif à l'un des gaz. La variation de l'énergie libre du système doit être nulle, pour l'équilibre, la somme des termes de la forme df doit être nulle, quelle que soit la variation infiniment petite dm relative à l'un des gaz. Il en résulte que chacun des gaz mélangés se dissout comme s'il était seul, à la pression que ce gaz exerce dans le mélange. On retrouve la loi de solubilité des mélanges gazeux.

Des considérations analogues s'appliquent à la condensation des gaz par les corps poreux; le corps poreux joue alors, par rapport à l'énergie libre, le même rôle que le liquide dissolvant. D'après les expériences de

M. Joulin (1), le charbon de bois condense, à une même température, des poids d'oxygène, d'azote et d'hydrogène sensiblement proportionnels aux pressions exercées par ces gaz; la condensation de ce gaz par le charbon suit la même loi que la solubilité de ces gaz dans les liquides.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 741; 1880. — *Annales de Chimie et de Physique*, 5^e série, t. XXII, p. 398; 1881.



DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES

PAR M. DAVID,

Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite.

La question au point de vue général doit être posée comme il suit :

Étant donnée une équation algébrique $f(y, x) = 0$, déterminer une série qui représente y ou plutôt une fonction de y au moyen de la variable x pour une valeur quelconque de x .

Je la résous dans toute sa généralité, et, je crois pouvoir ajouter, dans toute sa simplicité.

I. — INTRODUCTION.

Soit une fonction y de x définie par l'équation algébrique

$$f(y, x) = 0,$$

à deux variables imaginaires y et x , que l'on admet entière et irréductible; je suppose que la variable x se meut sur un plan X et la variable y sur un plan Y , et je marque sur ces plans les valeurs de y et x pour lesquelles l'équation prend des racines égales ou infinies, c'est-à-dire les points singuliers.

Je commence par donner ou rappeler quelques définitions et quelques propositions qui seront utiles par la suite.

1° Par la méthode de Puiseux, on sait déterminer les formes des séries en ces points singuliers, que nous désignerons par la notation (α, β) , les points α étant sur le plan X et les points β correspondants étant sur le plan Y. Nous les distinguerons en séries de première espèce et de deuxième espèce.

Les séries de première espèce sont celles dont les exposants sont fractionnaires, comme

$$x - \alpha = a(y - \beta)^{\frac{t}{s}} + a_1(y - \beta)^{\frac{t+1}{s}} + \dots,$$

ou bien à exposants entiers et devenant fractionnaires par l'inversion, comme

$$x - \alpha = a(y - \beta)^t + a_1(y - \beta)^{t+1} + \dots;$$

d'où, par l'inversion, l'on déduit

$$y - \beta = a'(x - \alpha)^{\frac{1}{t}} + a'_1(x - \alpha)^{\frac{2}{t}} + \dots$$

Une série de deuxième espèce a la forme

$$x - \alpha = a(y - \beta) + a_1(y - \beta)^2 + \dots;$$

mais elle ne peut être isolée, puisqu'à une valeur de x ne correspond qu'une valeur de y , et réciproquement; une telle série correspondant à un point singulier en suppose nécessairement une autre telle que

$$x - \alpha = a'(y - \beta) + a'_1(y - \beta)^2 + \dots$$

Une série isolée telle que

$$x - x_1 = a(y - y_1) + a_1(y - y_1)^2 + \dots$$

n'appartient qu'à un point unique du plan et à son correspondant; c'est la série de Taylor.

Le point (β, α) correspondant à une ou plusieurs séries de première espèce est dit point singulier de première espèce. Le point (β, α) cor-

respondant à plusieurs séries à exposants entiers est dit point singulier de deuxième espèce. Le point correspondant à une série de Taylor n'est pas un point singulier. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, p. 298, 1886.)

2° (x_1, y_1) étant une solution de l'équation $f(y, x) = 0$ non confondue avec des points singuliers, je remplace dans cette équation x par $x_1 + (x - x_1)$, y par $y_1 + (y - y_1)$ et l'équation proposée est mise sous la forme

$$(y - y_1) F(y - y_1, x - x_1) = (x - x_1) H(y - y_1, x - x_1),$$

les fonctions F et H étant entières et rationnelles. On peut la mettre sous diverses formes en faisant passer certains termes du premier membre dans le second; nous supposons, pour fixer les idées, que l'on ait fait passer du premier membre dans le second tous les termes qui renferment $x - x_1$ à une certaine puissance, et nous écrirons ainsi, après avoir isolé par la division le terme qui ne contient que $y - y_1$ à la première puissance,

$$y - y_1 = (x - x_1) G(y - y_1, x - x_1).$$

C'est cette équation qui admet la solution (x_1, y_1) ne coïncidant pas avec un point singulier que nous considérons. La fonction G est alors une fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme qui ne devient nul ni pour $x = x_1$, ni pour $y = y_1$, et dont le dénominateur est un polynôme en y qui ne devient pas nul pour $y = y_1$. Pour mettre cette décomposition en évidence, on peut écrire à la place de l'équation dont il s'agit

$$f(y, x) = Y - (x - x_1) V = 0,$$

ou mieux, en posant

$$G = \frac{(y - y_1) V}{Y},$$

$$f(y, x) = \frac{Y}{y - y_1} [y - y_1 - (x - x_1) G] = 0,$$

le polynôme Y étant divisible par $y - y_1$.

3° Soit l'équation

$$t - t_1 = H(x),$$

ou autrement, en prenant les modules,

$$\text{mod}(t - t_1) = T = \text{mod}H(x).$$

Quand $t = t_1$, on a sur le plan X un certain nombre de points x , correspondants, qui sont les racines de l'équation $H(x) = 0$; t décrivant à partir du point t_1 et autour de ce point des circonférences qui vont en augmentant ou en diminuant, la variable x décrit autour des points x_1 , des contours M, qui vont en augmentant ou diminuant avec T; ces contours se rencontrent ainsi; ces points de rencontre sont les points singuliers de l'équation $t - t_1 = H(x)$, et ce sont, dans le cas actuel, tous des points singuliers de première espèce. De même que t est le centre du cercle dont le rayon est T, nous dirons que x_1 est le centre d'un contour M tracé autour d'un point x_1 . (On trouvera les démonstrations et les explications nécessaires dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, qui paraîtront à la fin de l'année 1887.)

4° La considération de ces contours donne naissance à la série de Burmann, que nous présentons sous trois formes différentes.

Le centre de contour M étant désigné par η_1 , et $G(x)$ étant une fonction holomorphe dans l'intérieur du contour M

$$\begin{aligned} G(x) = G(z) + \frac{H(x)}{1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{(z - \eta_1)^2}{H^2(z)} \frac{\partial H(z)}{\partial z} G(z) \\ + \frac{H^2(x)}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{(z - \eta_1)^2}{H^3(z)} \frac{\partial H(z)}{\partial z} G(z) + \dots, \end{aligned}$$

avec la précaution de faire dans le second membre $z = \eta_1$.

En remplaçant dans cette série $H(x)$ par $(x - \eta_1) H(x)$, ce qui fait que la convergence s'établit par l'équation

$$\text{mod}(x - \eta_1) H(x) = T,$$

et que la série est convergente en vertu de la relation

$$\text{mod} \frac{(x - \eta_1) H(x)}{(z - \eta_1) H(z)} < 1,$$

on a

$$G(x) = G(z) + \frac{(x - \eta) H(x)}{1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{G \frac{\partial(z - \eta) H}{\partial z}}{H^2(z)} \\ + \frac{(x - \eta)^2 H^2(x)}{1 \ 1 \ 2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{G \frac{\partial(z - \eta) H}{\partial z}}{H^3(z)} + \dots,$$

en faisant toujours dans le second membre $z = \eta$.

En troisième lieu

$$G(x) = G(\eta) + \frac{(x - \eta) H(x)}{1} \frac{1}{H(\eta)} \frac{\partial G(\eta)}{\partial \eta} \\ + \frac{(x - \eta)^2 H^2(x)}{1 \ 1 \ 2} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{H^2(\eta)} \frac{\partial G(\eta)}{\partial \eta} + \dots,$$

qui rappelle par sa forme la série de Lagrange.

Si l'on suppose le contour M déterminé par l'équation

$$\text{mod}(x - \eta) = T,$$

le contour est un cercle de rayon T dont le centre est au point η , et la série est celle de Taylor qui est ainsi un cas particulier de celle de Burmann, non pas seulement au point de vue de sa forme, mais encore au point de vue de sa convergence.

Les démonstrations, que je ne donne pas pour abréger, appartiennent pour la plus grande partie à Puiseux (*Journal de Mathématiques*, t. XV). Mais, faisant usage d'autres notations, il ne paraît pas avoir reconnu que la forme unique qu'il a construite était la série de Burmann.

5° Un cas plus général que le précédent est l'équation de contours correspondant à l'équation

$$y - y_1 = (x - x_1)G.$$

Il est inséré, en même temps que l'autre cas, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, année 1887.

On considère alors les deux plans X et Y dont il a déjà été question. Sur le plan X on décrit, autour du point x , un contour que je désignerai

par A, et dont l'équation est

$$\text{mod } C(x - x_1) e^{\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x}} = T.$$

A ce contour correspond, en vertu de l'équation donnée, sur le plan Y, un autre contour B tracé autour du point y_1 , dont l'équation est

$$\text{mod } (y - y_1) e^{-\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial y} dy} = T.$$

Les intégrales sont de forme abélienne, et il faut supposer dans la première équation la variable y remplacée par son expression en x déduite de l'équation donnée, et dans la seconde équation la variable x remplacée par son expression en y , déduite de la même équation. D'ailleurs, leurs limites inférieures, par rapport à x ou y , sont prises à partir de zéro.

La constante C introduite dans l'équation du contour A est ce que devient la fonction G quand on y fait à la fois $x = x_1$, $y = y_1$.

La constante réelle et positive T est ce que devient le premier membre de l'équation du contour A quand on y fait $x = \alpha$, ou bien encore le premier membre du contour B quand on y fait $x = \beta$; (α , β) étant le premier des points singuliers de première espèce quand on y fait croître T à partir de zéro.

Les propriétés essentielles de ces deux contours, qui, on se le rappelle, sont en correspondance en vertu de l'équation donnée, sont : d'abord que les variables y restent comprises ou autrement que les contours ne dépassent pas de points singuliers de première espèce; en second lieu, que, comme dans le premier, ils s'agrandissent en même temps autour des points x_1 et y_1 jusqu'à l'obstacle que nous venons de dire; en troisième lieu que, dans ces limites, l'équation donnée peut se mettre sous la forme

$$\psi(y) = \varphi(x);$$

enfin que la fonction G, au moyen des fonctions de forme abélienne que nous avons indiquées, donne l'identité

$$G = C e^{\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} dx + \int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial y} dy}.$$

6. Je rappelle encore le théorème suivant (*voir le Mémoire déjà cité inséré dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse, de l'année 1886*).

Étant donnée une équation $f(y, x) = 0$, considérons-en une solution (x_1, y_1) distincte des points singuliers. Si la variable y trace sur un plan Y un contour B qui va en s'agrandissant autour du point y_1 , la variable x trace de même sur une certaine surface A un contour unique qui va en s'agrandissant autour du point correspondant x_1 , abstraction faite des points α de deuxième espèce, jusqu'à ce que les deux contours passent par un point singulier (β, α) de première espèce. Le contour sur le plan X qui passe par le point α de première espèce forme la base de cette surface et indique en même temps la limite du théorème. A toute valeur de y située dans le contour B ne correspond qu'une valeur de x située sur la surface A. Le nombre des surfaces est égal au degré de l'équation par rapport à x .

La réciproque consiste en ceci, que, pour les n surfaces A relatives à un contour B, à chaque valeur de x prise sur l'une des surfaces ne correspond qu'une valeur de y dans le contour B, celui-ci étant arrêté au point de première espèce qui arrête le contour formant la base de la surface. (Mémoire déjà cité, p. 342 et 339.)

7. J'ajoute la définition suivante :

Il faut entendre qu'une série à simple entrée est une série

$$\Sigma u_n,$$

dont le terme général ne correspond qu'à un seul indice n , et qu'une série à double entrée est une série comme

$$\Sigma u_{m,n},$$

dont le terme général correspond à deux indices m et n . Il est d'ailleurs nécessaire, pour que cette distinction existe, que les indices croissent à l'infini.

Ces préliminaires posés et abrégés autant qu'il a été possible, je passe à l'objet essentiel du Mémoire.

II. — SOLUTION PAR LA SÉRIE DE LAGRANGE.

1. Nous allons démontrer la formule

$$\varphi(\gamma, x) = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(\gamma, x) \frac{\frac{\partial f(\gamma, x)}{\partial \gamma}}{f(\gamma, x)} d\gamma,$$

pour laquelle l'intégration se fait suivant un contour B tracé arbitrairement sur le plan Y, pourvu qu'il ne dépasse pas un point singulier de première espèce, et les valeurs de x sont sur l'une des n surfaces déduites du contour B et que nous appellerons encore le contour A. Quant à la fonction $\varphi(\gamma, x)$, les valeurs de x étant aussi comprises dans le contour A, elle exprime non seulement une racine γ de l'équation $f(\gamma, x) = 0$ contenue dans le contour B, mais encore une fonction très générale de cette racine. Cauchy a fait un grand usage de cette intégrale définie, mais dans le cas seulement où elle ne contient qu'une variable.

Si dans le contour B on considère une valeur particulière γ' de γ , il n'y a dans le contour A qu'une valeur x' de x correspondante, et réciproquement, si dans le contour A on considère une valeur particulière x' de x , il n'y a dans le contour B qu'une valeur γ' de γ correspondante. On a identiquement, puisque $f'(\gamma', x') = 0$ par hypothèse

$$f(\gamma, x') = f(\gamma, x') - f'(\gamma', x').$$

Le second membre est évidemment divisible par $\gamma - \gamma'$, et l'on peut en conséquence poser

$$f(\gamma, x') = (\gamma - \gamma') H(\gamma, \gamma', x'),$$

H étant une fonction entière de γ, γ', x' qui ne devient pas nulle pour $\gamma = \gamma'$. Mais il faut remarquer que si (γ'', x') est une seconde solution de l'équation $f(\gamma, x) = 0$, on ne peut de même poser

$$f(\gamma, x') = (\gamma - \gamma'') H(\gamma, \gamma'', x'),$$

attendu que γ'' est hors du contour B, circonstance qui est écartée par les explications du Mémoire cité, et qui n'aurait plus lieu, si l'on n'avait eu le soin de définir les points singuliers de première espèce, de telle sorte que la réciprocity du théorème existe (n° 6 du paragraphe précédent, et page 340 du Mémoire cité.)

En différentiant par rapport à γ , il vient

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = (\gamma - \gamma') \frac{\partial H}{\partial \gamma} + H;$$

la division des deux équations donne ensuite

$$\frac{1}{f(\gamma, x')} \frac{\partial f(\gamma, x')}{\partial \gamma} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma - \gamma'}.$$

Intégrant après avoir multiplié par $\varphi(\gamma, x') d\gamma$, il vient toujours identiquement tant que l'intégrale reste indéfinie, et exclusion faite des valeurs de x qui sont sur d'autres surfaces que la surface A et des valeurs de γ qui sont hors du contour B,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\gamma, x') \frac{\partial f(\gamma, x')}{\partial \gamma}}{f(\gamma, x')} d\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\gamma, x') \frac{\partial H}{\partial \gamma}}{H} d\gamma + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\gamma, x')}{\gamma - \gamma'} d\gamma.$$

Si l'on prend maintenant les intégrales suivant le contour B, on doit remarquer que toutes les quantités sous le signe \int sont uniformes, puisque les valeurs de γ sont comprises dans le contour B; alors la première intégrale du second membre est nulle puisque H ne devient pas nul; dans la seconde intégrale du second membre, la différentielle ne devient infinie que pour $\gamma = \gamma'$, et cette intégrale est, par suite, égale à $\varphi(\gamma', x')$. D'où résulte que l'équation précédente se réduit à

$$\varphi(\gamma', x') = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\gamma, x') \frac{\partial f(\gamma, x')}{\partial \gamma}}{f(\gamma, x')} d\gamma.$$

C'est la formule dont il s'agit quand on supprime les accents, ce changement de notation ne pouvant plus donner lieu à l'ambiguïté.

D'après le théorème n° 6 du paragraphe I, elle subsiste jusqu'à ce que

le contour B et le contour A correspondants passent respectivement par des points (β, α) pour lesquels on a une série de première espèce.

Plus généralement, à la valeur y_1 de y prise pour point de départ du contour B, correspondent n valeurs de x , chacune d'elles étant sur l'une des surfaces A et formant pour ainsi dire leur départ. Nous avons ainsi n formules comme la précédente; elles cessent de subsister, lorsque les contours A, au fur et à mesure de l'agrandissement du contour B, atteignent les bases des surfaces A pour lesquelles on a des séries de première espèce.

D'ailleurs le contour B, sauf ces limites, est arbitraire; et il n'y a pas d'autre détermination que la suivante: c'est qu'aux limites le contour B et les bases correspondantes des surfaces passent par des points (β, α) qui appartiennent à de telles séries, c'est-à-dire par des points singuliers de première espèce.

2. De cette série nous allons tirer la série de Lagrange, en tant qu'elle développe une racine y de l'équation $f(y, x) = 0$, ou une fonction de cette racine, au moyen d'une valeur de x exclusivement située sur une surface A.

Soit $x = x_1$, $y = y_1$, une solution de cette équation, ces points x_1 et y_1 étant, suivant l'expression que nous avons déjà employée, les départs du contour B et de la surface A. En remplaçant x par $x_1 + (x - x_1)$ et y par $y_1 + (y - y_1)$, l'équation devient, ainsi qu'on l'a dit (n° 2, § I),

$$f(y, x) = \frac{Y}{y - y_1} [y - y_1 - (x - x_1)G] = 0,$$

et en substituant dans notre formule

$$\begin{aligned} \varphi(y, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(y, x) \frac{\partial}{\partial y} \frac{Y}{y - y_1} [y - y_1 - (x - x_1)G]}{\frac{Y}{y - y_1} [y - y_1 - (x - x_1)G]} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(y, x) \frac{y - y_1}{Y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{Y}{y - y_1} + \frac{1 - \frac{\partial}{\partial y} (x - x_1)G}{y - y_1 - (x - x_1)G} dy. \end{aligned}$$

Le premier terme de la quantité sous le signe \int ne devient pas infini dans le contour B suivant lequel se fait l'intégration, puisque Y est un polynôme de y qui comprend le facteur $y - y_1$, et l'intégrale s'écrit ainsi

$$\varphi(y, x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(y, x) \left[1 - \frac{\partial}{\partial y} (x - x_1)G \right]}{y - y_1 - (x - x_1)G} dy.$$

Or on a (n° 3, § I) les équations

$$T = \text{mod} C(x - x_1) e^{\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} dx}$$

pour le contour A,

$$T = \text{mod} (y - y_1) e^{-\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial y} dy}$$

pour le contour B, ces deux contours étant correspondants en vertu de l'équation

$$y - y_1 = (x - x_1)G,$$

qui n'est qu'une transformation de l'équation proposée. Si l'on suppose que x est un point de l'intérieur du contour A, et y un point du contour B, on a

$$\text{mod} C(x - x_1) e^{\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} dx} < \text{mod} (y - y_1) e^{-\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial y} dy},$$

ce qui, à cause de l'identité mentionnée au même article, donne

$$\text{mod} \frac{(x - x_1)G}{y - y_1} < 1.$$

L'intégrale se développe donc en série, et l'on a

$$\begin{aligned} \varphi(y, x) = & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(y, x) \left[1 - \frac{\partial (x - x_1)G}{\partial y} \right]}{y - y_1} dy \\ & + \frac{x - x_1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(y, x) \left[1 - \frac{\partial (x - x_1)G}{\partial y} \right]}{(y - y_1)^2} dy \\ & + \frac{(x - x_1)^2}{2\pi i} \int \frac{\varphi(y, x) \left[1 - \frac{\partial (x - x_1)G}{\partial y} \right]}{(y - y_1)^3} G^2 dy + \dots \end{aligned}$$

Les quantités sous le signe \int ne deviennent infinies que pour $y = y_1$ et l'on peut maintenant prendre les intégrales autour du point y_1 suivant des contours aussi petits que l'on voudra. On sait d'ailleurs que de telles expressions se réduisent à des dérivées d'ordre marqué par le degré du dénominateur et l'on peut écrire, à la place de la formule qui précède,

$$\begin{aligned}\varphi(y, x) = & \varphi(y, x) \left[1 - \frac{\partial(x-x_1)G}{\partial y} \right] \\ & + \frac{x-x_1}{1} \frac{\partial}{\partial y} \varphi \left[1 - \frac{\partial(x-x_1)G}{\partial y} \right] G \\ & + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi \left[1 - \frac{\partial(x-x_1)G}{\partial y} \right] G^2 + \dots,\end{aligned}$$

en ayant soin de faire $y = y_1$ dans le second membre après les différentiations.

A la place de cette série écrivons

$$\begin{aligned}\varphi(y, x) = & \varphi(y, x) + \frac{x-x_1}{1} \frac{\partial}{\partial y} \varphi G + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi \frac{\partial G}{\partial y} + \dots \\ & - \frac{x-x_1}{1} \varphi \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{(x-x_1)^2}{1} \frac{\partial}{\partial y} \varphi G \frac{\partial G}{\partial y} - \dots\end{aligned}$$

puis à la place de la première ligne

$$\begin{aligned}\varphi(y, x) + & \frac{x-x_1}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} G + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} G^2 + \frac{(x-x_1)^3}{1.2.3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} G^3 + \dots \\ & + \frac{x-x_1}{1} \varphi \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{(x-x_1)^2}{1} \frac{\partial}{\partial y} \varphi G \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{(x-x_1)^3}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi G^2 \frac{\partial G}{\partial y} + \dots\end{aligned}$$

On voit que la seconde ligne disparaît; il reste

$$\begin{aligned}\varphi(y, x) = & \varphi(y, x) + \frac{x-x_1}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} G \\ & + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} G^2 + \frac{(x-x_1)^3}{1.2.3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} G^3 + \dots,\end{aligned}$$

et l'on reconnaît la série de Lagrange sous sa forme consacrée par l'usage.

En remplaçant G par son expression du § I, on peut écrire encore, pour ne mettre en évidence que des polynômes entiers

$$\begin{aligned} \varphi(y, x) = \varphi(y, x) + \frac{x - x_1}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{(y - y_1) V}{Y} \\ + \frac{(x - x_1)^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{(y - y_1)^2 V^2}{Y^2} \\ + \frac{(x - x_1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{(y - y_1)^3 V^3}{Y^3} + \dots \end{aligned}$$

La fonction G , par sa définition même, contient le plus souvent y_1 . Dans le cas où il n'en est pas ainsi, on peut faire $y = y_1$, après les différentiations, et c'est ainsi qu'est présentée ordinairement la série de Lagrange. En restant dans le cas général, ce n'est qu'après les différentiations que cette opération doit être faite. C'est par ce détail seulement que la série de Lagrange diffère de celle que nous présentons.

Ainsi qu'il a été déjà dit, au point y_1 , correspondent n valeurs de x , et il y a autant de séries semblables qu'il y a de surfaces A correspondantes. Ces séries ne sont pas les mêmes; car, si l'on indique par x_1, x_2, x_3, \dots les n valeurs de x correspondant à la valeur y_1 , pour obtenir la fonction G , il faut remplacer dans $f(y, x)$, x par $x_1 + (x - x_1)$, par $x_2 + (x - x_2)$, par $x_3 + (x - x_3)$, \dots . Chacune de ces fonctions G correspond alors à une des surfaces, et les limites de chacune des séries (n° 6, § I) sont données par les bases des surfaces, lesquelles sont déterminées *a priori* par des contours passant par les points singuliers de première espèce. Il résulte de là que les n bases des surfaces, c'est-à-dire les contours tracés directement sur le plan X , suffisent, malgré leurs rencontres, pour obtenir les limites de convergence des séries. En un mot, la considération des surfaces n'a été qu'un moyen de démonstration, et l'on peut dire maintenant que les séries que nous venons d'obtenir sont complètement séparées les unes des autres, et que chacune d'elles est une fonction holomorphe ou semi-holomorphe de x dans chaque contour A correspondant, abstraction faite des coupures qu'ont pu y tracer les autres contours.

Remarque 1. — Dans le cas ordinaire et très particulier de l'équation

considérée par Lagrange, G est indépendant de x , et le contour de convergence est déterminé par l'équation

$$\text{mod}(x - x_1) = T;$$

c'est un cercle limité par les valeurs de x qui font acquérir à l'équation

$$y - y_1 - (x - x_1)G = 0$$

des racines égales, ainsi que Cauchy l'a démontré le premier. Mais les points singuliers sont tous de première espèce, attendu que l'équation est du premier degré par rapport à x .

Remarque II. — Il est bon d'ajouter cette observation; c'est que l'intégrale définie est à un certain point de vue une solution préférable à la solution par la série de Lagrange; car, dans cette intégrale définie, l'un des contours A et B est arbitraire, et elle peut par suite être plus utile analytiquement que la série dans laquelle les deux contours sont déterminés. Mais, au point de vue du calcul numérique, la série seule donne des résultats.

3. Réciproquement, pour toute valeur de x hors du contour A limité par le premier point singulier de première espèce, la série de Lagrange n'existe pas.

La propriété caractéristique de cette série est en effet donnée par la relation

$$\text{mod} \frac{(x - x_1)G}{y - y_1} < 1.$$

Or, le point x étant, par hypothèse, hors du contour A , le point y correspondant du point x est hors du contour B , puisque cette correspondance s'établit toujours par l'équation

$$y - y_1 = (x - x_1)G;$$

et par conséquent les deux points sont tous deux hors des contours A et B , et l'on a entre eux, la relation

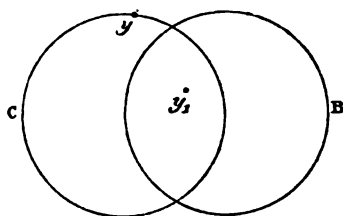
$$\text{mod} \frac{(x - x_1)G}{y - y_1} = 1.$$

Mais si, x restant constant, on suppose y variable, cette équation représente un contour C qui est tel que, pour tout point compris dans son intérieur, on a

$$\operatorname{mod} \frac{(x-x_1)G}{y-y_1} > 1,$$

puisque le module va en augmentant à mesure que y se rapproche du point y_1 .

Le point y étant hors du contour B et le contour C entourant le



point y_1 , le contour C coupe nécessairement le contour B. Sur la partie du contour B comprise dans le contour C, on a donc la relation

$$\operatorname{mod} \frac{(x-x_1)G}{y-y_1} > 1,$$

et l'intégrale définie dont nous nous sommes servis ne donne plus la série de Lagrange.

Le contour A que nous avons déterminé partage donc le plan en deux régions, la première dans laquelle la série de Lagrange est convergente, la seconde dans laquelle cette série est divergente, et ce contour doit bien seul être appelé *contour de convergence*; car tout contour ne remplissant pas cette condition, et compris dans le grand contour, ne renferme que des points pour lesquels la convergence a lieu, et est une limite relative qui en suppose une plus grande. Au fond, la question de convergence n'est complètement résolue que lorsque le contour partage, comme ici, le plan en deux régions, l'une de convergence, l'autre de divergence.

III. — DES SÉRIES AUTRES QUE CELLES DE LAGRANGE
QUI EXPRIMENT LA RACINE D'UNE ÉQUATION.

1. En remplaçant la série de Lagrange qui est une fonction holomorphe de x (voir fin du n° 2, § II) par un quelconque de ses développements en x , développements qui sont donnés par la série de Burmann (n° 4, § I), on a, pour représenter l'une des fonctions $\varphi(\gamma, x)$, des séries à double entrée.

Soit

$$\text{mod}(x - \eta) H(x) = T,$$

l'équation du contour que nous appelons M ou, pour abréger, en faisant coïncider le point η avec le point x_1 ,

$$\text{mod}(x - x_1) H(x) = T.$$

La série à double entrée est engendrée par l'intégrale définie double

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \frac{\varphi(\gamma, z) \left[1 - \frac{\partial(z - z_1)G}{\partial \gamma}\right]}{\gamma - \gamma_1 - (z - z_1)G} \frac{\frac{\partial(z - z_1)H}{\partial z}}{(z - z_1)H(z) - (x - x_1)H(x)} dz d\gamma,$$

z , étant ainsi mis à la place de x_1 , tout simplement afin de régulariser la notation. Quant aux intégrations elles sont prises par rapport à γ sur le contour B et par rapport à z sur le contour M. Il faut examiner dans quel cas cette double intégration est possible.

Intégrons d'abord par rapport à z . L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\gamma, z) \left[1 - \frac{\partial(z - z_1)G}{\partial \gamma}\right]}{\gamma - \gamma_1 - (z - z_1)G} \frac{\frac{\partial(z - z_1)H}{\partial z}}{(z - z_1)H(z) - (x - x_1)H(x)} dz$$

se réduit, d'après la série de Burmann, à

$$\frac{\varphi(\gamma, x) \left[1 - \frac{\partial(x - x_1)G}{\partial \gamma}\right]}{\gamma - \gamma_1 - (x - x_1)G}.$$

Si le point z qui appartient au contour M est en dehors du contour A , il y a des points de x à l'extérieur de celui-ci. Dans ce cas la série de Lagrange n'existe pas.

Effectuant maintenant la première intégration par rapport à y , cette intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(y, z) \left[1 - \frac{\partial(z - z_1)G}{\partial y} \right] dy}{y - y_1 - (z - z_1)G}$$

ne conduit pas non plus à la série de Lagrange quand il y a un point z hors du contour A .

La série à double entrée ne peut donc être convergente que lorsque le contour M est compris dans le contour A .

Supposons cette condition remplie.

L'intégrale, en se servant des relations

$$\text{mod} \frac{(z - z_1)G}{y - y_1} < 1$$

(n° 2, § II) et

$$\text{mod} \frac{(x - x_1)H(x)}{(z - z_1)H(z)} < 1,$$

(n° 4, § I), se développe en une série à double entrée dont le terme général est

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint \varphi(y, z) \left[1 - \frac{\partial(z - z_1)G}{\partial y} \right] \\ & \times \frac{(z - z_1)^n G^n}{(y - y_1)^{n+1}} \frac{\partial(z - z_1)H}{\partial x} \frac{(x - x_1)^m H^m(x)}{(z - z_1)^{m+1} H^{m+1}(z)} dz dy. \end{aligned}$$

Soient C le maximum du module de

$$\varphi(y, z) \left[1 - \frac{\partial(z - z_1)G}{\partial y} \right] \frac{\partial(z - z_1)H}{\partial z},$$

v le maximum du module de $\frac{(z - z_1)G}{y - y_1}$ qui est plus petit que 1, u le maximum du module de $\frac{(x - x_1)H(x)}{(z - z_1)H(z)}$ qui est aussi plus petit que 1, le module du terme général qui précède est plus petit que le module de l'in-

tégrale

$$cv^n u^m \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int \frac{dy}{y-y_1} \int \frac{dz}{(z-z_1)H(z)}.$$

Or on a, quel que soit le contour suivant lequel on prend les intégrations,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dy}{y-y_1} = 1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{(z-z_1)H(z)} = \frac{1}{H(z_1)};$$

le module du terme général est donc plus petit que

$$acv^n u^m,$$

en désignant par a le module de $\frac{1}{H(z_1)}$,

En donnant à m et à n les valeurs comprises dans la suite 0, 1, 2, 3, ..., on forme le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} ac, & acv, & acv^2, & \dots, \\ acu, & acvu, & acv^2u, & \dots, \\ acu^2, & acvu^2, & acv^2u^2, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

toutes les lignes formant des séries convergentes et égales respectivement à

$$ac \frac{1}{1-v}, \quad ac \frac{u}{1-v}, \quad ac \frac{u^2}{1-v^2}, \quad \dots;$$

de plus, la somme de ces séries convergentes est égale à

$$ac \frac{1}{(1-v)(1-u)}.$$

Il en résulte que le tableau est absolument convergent (*Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 108). Le tableau qu'on formerait avec les modules des différents termes est *a fortiori* absolument convergent. Par suite, ces termes eux-mêmes forment une série à double entrée qui est absolument convergente.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, c'est donc que le contour M soit compris dans le contour A. Si la fonction $H(z)$ est

telle que le contour M coupe le contour A, il est clair que la convergence est limitée aux points du contour M qui sont compris dans le contour A.

Si l'on prend pour le contour M un cercle décrit autour du point x , comme centre, la série à double entrée est ordonnée par rapport aux puissances entières et croissantes de $x - x_1$.

On sait qu'une telle série est développable dans le cercle, tant que la série reste holomorphe, c'est-à-dire dans le cas actuel tant que le cercle est compris dans le contour A. On sait de plus qu'un tel développement n'est possible que d'une manière. Nous verrons tout à l'heure que réciproquement cette série à double entrée ramène à la série de Lagrange. D'où il résulte que celle-ci est la seule série à simple entrée qui exprime la fonction $\varphi(y, x)$.

Nous énonçons en conséquence le théorème suivant, qui est presque tout le Mémoire.

THÉORÈME. — *La série de Lagrange est la seule série à simple entrée qui développe une fonction d'une racine de l'équation proposée.*

Le contour déterminé par l'équation

$$\text{mod} C(x - x_1) e^{\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} dx} = T,$$

contour qui passe par le premier point singulier α de première espèce, partage le plan en deux régions, la première dans laquelle la série est convergente, la seconde dans laquelle elle est divergente.

Toutes les autres séries que l'on peut obtenir pour la solution de ce problème sont des séries à double entrée, dont le contour de convergence est compris dans le contour de convergence de la série de Lagrange.

T est la valeur particulière que prend le premier membre de l'équation ci-dessus quand on y fait $x = \alpha$.

Une observation essentielle à faire ici, c'est que la condition de convergence détermine la série, et que la série change avec cette convergence; vouloir, suivant la vieille habitude, déterminer la convergence pour une série donnée *a priori*, c'est, à peu près, prendre la question à l'envers : les deux questions sont inséparables analytiquement.

Quant à la série qui résulte de là, en posant

$$(z - z_1) G(y - y_1, z - z_1) = K(y, z),$$

nous l'écrivons comme il suit

$$\begin{aligned} \varphi(y, x) = \varphi(y, z) + \dots \\ + (x - x_1)^n H^n(x) \sum_{1, 2, \dots, p, 1, 2, \dots, n} \frac{\partial^{p+n-1}}{\partial y^{p-1} \partial z^n} \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} \frac{k^p(y, z)}{H^{n+1}(z)} \frac{\partial(z - z_1) H}{\partial z}, \end{aligned}$$

et il faut faire dans le Σ du second membre

$$y = y_1, \quad z = z_1 = x_1.$$

Quand le contour M est un cercle, il faut poser $H = 1$, et la série devient

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(y, x) = \varphi(y, x) + \dots \\ + (x - x_1)^n \sum_{1, 2, \dots, p, 1, 2, \dots, n} \frac{\partial^{p+n-1}}{\partial y^{p-1} \partial x^n} \frac{\partial \varphi(y, x)}{\partial y} k^p(y, x), \end{aligned} \right.$$

en faisant dans le second membre $y = y_1$, $x = x_1$. Le cercle de convergence de cette série est le plus grand cercle décrit du centre x_1 et compris dans le contour A.

2. Comme application, considérons la solution générale, ou à peu près générale qui a été donnée dans ces derniers temps (*Journal de Mathématiques*, année 1881), et qui est, à ma connaissance, la seule publication où la solution générale a été abordée. Nous en profiterons ensuite pour démontrer la proposition sur laquelle nous nous sommes appuyés dans le paragraphe précédent, à savoir que la série de Lagrange est la seule série à simple entrée qui résolve la question.

M. Gomez-Teixeira (Portugal) a pris l'équation sous la forme

$$y = t + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

a_1, a_2, a_3, \dots étant des fonctions de y qui ne contiennent pas t , x étant égal à zéro, et la fonction φ ne contenant pas x , et il a donné pour solu-

tion une série qui procède suivant les puissances entières et croissantes de la variable et qui est à double entrée, mais il s'est dispensé de déterminer le rayon du cercle de convergence qui, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, ne correspond plus nécessairement, comme dans le cas considéré par Cauchy, au premier point pour lequel l'équation prend des racines égales.

Notre formule devient

$$(b) \quad \varphi(y) = \varphi(t) + \dots + 2^n \sum_{1.2\dots p} \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^n k^p(t, x)}{1.2\dots n \partial x^n}.$$

On voit que, conformément à une observation du n° 2, § II, on a pu remplacer souvent les différentiations y par t . Le second membre de l'équation peut être une série, bien que le texte de M. Gomez Teixeira suppose un polynôme de degré quelconque.

On a, par la notation d'Arbogast [voir *Journal de Mathématiques*, p. 63, formule (3), année 1882, les quelques explications que j'ai données à ce sujet],

$$k^p = x^p a_1^p + x^{p-1} D a_1^p + 2^{p-2} D^2 a_1^p + \dots,$$

et l'on en déduit, en faisant $x = 0$,

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} \frac{\partial^n k^p(t, x)}{\partial x^n} = D^{n-p} a_1^p.$$

La série dont il s'agit se présente ainsi sous la forme

$$\varphi(y) = \varphi(t) + \dots + x^n \sum \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} D^{n-p} \frac{a_1^p}{1.2\dots p},$$

la quantité

$$D^{n-p} \frac{a_1^p}{1.2\dots p},$$

dans laquelle les a sont maintenant des fonctions de t , se calculant très rapidement par la règle d'Arbogast. C'est pour cela que je préfère cette forme à celle de M. Gomez Teixeira qui s'en déduit d'ailleurs facilement.

En effet, de la formule de la page 64 du Mémoire qui vient d'être cité, il

résulte, en différentiant et faisant ensuite $x = 0$,

$$D^n \varphi(a_i) = \sum \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots} \varphi(a_i)}{\partial a_1^{p_1} \partial a_2^{p_2} \dots} \frac{a_1^{p_1}}{1 \cdot 2 \dots p_1} \frac{a_2^{p_2}}{1 \cdot 2 \dots p_2} \dots,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de p_1, p_2, \dots , qui satisfont à l'équation

$$p_1 + 2p_2 + \dots = n.$$

Remplaçons-y n par $n - p$, $\varphi(a_i)$ par a_i^p , $p_1 + p_2 + \dots$ par $p - p_1$, il vient

$$D^{n-1} \frac{a_1^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \sum \frac{a_1^{p_1}}{1 \cdot 2 \dots p_1} \frac{a_2^{p_2}}{1 \cdot 2 \dots p_2} \frac{a_3^{p_3}}{1 \cdot 2 \dots p_3} \dots,$$

le signe Σ s'étendant aux nombres entiers et positifs qui satisfont aux deux équations

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = n,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = p.$$

On retrouve donc immédiatement la formule

$$\varphi(y) = \varphi(t) + \dots + x^n \sum \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{a_1^{p_1}}{1 \cdot 2 \dots p_1} \frac{a_2^{p_2}}{1 \cdot 2 \dots p_2} \frac{a_3^{p_3}}{1 \cdot 2 \dots p_3},$$

qui est celle de M. Gomez Teixeira, en rectifiant une faute de calcul qui lui a fait écrire

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad \text{au lieu de } x^n.$$

3. Ainsi l'on passe facilement de la série de Lagrange étendue au cas général à celle de M. Gomez Teixeira. Réciproquement, on peut passer de la formule de M. Gomez Teixeira à celle de Lagrange.

Il suffit pour cela de remonter à l'article précédent, de remarquer ensuite qu'un simple calcul permet de passer de la formule (b) ci-dessus à la formule (a) et que celle-ci n'est pas autre que la formule

$$\varphi(y, x) = \varphi(y, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} k + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} k^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} k^3 + \dots,$$

quand on y développe le second membre au moyen de la série de Taylor. On arrive donc par cette voie à la série de Lagrange sans qu'on puisse être conduit à une série à simple entrée.

Voici donc une nouvelle démonstration qui établit que la solution est donnée dans le cas général par la série de Lagrange, puisque la méthode de M. Gomez Teixeira ne suppose pas la connaissance de celle-ci. Cette démonstration incomplète si l'on veut, attendu qu'il n'en résulte qu'une région de convergence diminuée, est suffisante pour l'objet que nous nous proposons.

En effet, nous sommes partis d'une série ayant lieu par rapport aux puissances entières et croissantes de la variable, et un tel développement n'est possible, comme on sait, que d'une seule manière. Il en est de même de la série de Lagrange qui s'en déduit, et, par conséquent, celle-ci est la seule série à simple entrée qui puisse représenter une fonction de racine de l'équation proposée. C'est ce que nous avons admis pour énoncer le théorème de ce paragraphe.



SUR LES

ARCS DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES

PAR M. G. HUMBERT,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. L'arc s d'une courbe algébrique plane $f(x, y) = 0$ est représenté par l'intégrale abélienne $\int \frac{dx}{f_y'} (f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{1}{2}}$; mais, à cause du radical qui figure dans cette expression, l'intégrale n'est généralement pas une des intégrales abéliennes appartenant à la courbe $f(x, y) = 0$; de sorte que la somme des arcs interceptés sur cette courbe par deux courbes arbitraires de même degré ne peut s'exprimer en fonction algébrique et logarithmique des paramètres qui déterminent ces courbes.

Dans le cas particulier où $f_x'^2 + f_y'^2$ est égal, en chaque point de $f(x, y) = 0$, au carré d'une fonction rationnelle de x, y , l'arc est exprimable par une intégrale abélienne appartenant à la courbe, et le théorème d'Abel apprend alors à former la somme des arcs interceptés par deux courbes algébriques : les courbes $f(x, y) = 0$ qui jouissent de cette propriété sont les courbes de direction, et nous avons eu occasion, dans un autre Mémoire, de les étudier, précisément au point de vue de l'application du théorème d'Abel, aux intégrales dont dépendent les longueurs de leurs arcs (¹).

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1887.

2. Le but du présent travail est de faire voir que, sur une courbe *quelconque*, on peut toujours, et d'une infinité de manières, déterminer un certain nombre d'arcs dont la somme soit rectifiable; parmi les propositions de cette nature auxquelles nous arriverons, figure en particulier une généralisation du théorème si connu de Graves et Chasles sur les arcs de coniques.

3. Le problème qui consiste à déterminer sur une courbe algébrique plane un certain nombre d'arcs dont la somme algébrique soit rectifiable a déjà reçu une solution bien curieuse, que nous rappellerons en quelques mots.

Chasles a montré que le centre des moyennes distances des points de contact d'une courbe algébrique avec les tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à une direction donnée reste fixe lorsque cette direction varie, et c'est de ce théorème que Duhamel a déduit la proposition que nous avons en vue. En effet, x désignant l'abscisse d'un des points de contact de la courbe avec une des tangentes parallèles, Σx est indépendant de la direction donnée : si donc on modifie infiniment peu cette direction, on aura $\Sigma dx = 0$, et par suite, en raison de l'égale inclinaison des tangentes sur l'axe des x , on aura aussi $\Sigma ds = 0$, s désignant toujours l'arc de la courbe. En d'autres termes :

Si l'on mène à une courbe algébrique plane toutes ses tangentes parallèles à une direction donnée, et si l'on fait ensuite varier cette direction, la somme des arcs décrits sur la courbe par les points de contact est à chaque instant égale à zéro.

C'est en essayant de retrouver cette proposition par l'étude directe de l'intégrale abélienne exprimant la longueur de l'arc que nous sommes parvenu à établir la théorie générale dont l'exposé suit.

4. Les courbes que Laguerre a nommées *courbes de direction*, et dont nous avons rappelé plus haut une des propriétés, sont celles qui sont représentées, en coordonnées tangentielles et rectangulaires, par une équation

tion de la forme

$$(u^2 + v^2) \varphi^2(u, v, w) - F^2(u, v, w) = 0,$$

φ et F étant deux polynômes homogènes en u, v, w , et respectivement de degrés $\mu - 2$ et μ .

Cela posé, φ et F étant donnés, considérons les courbes de direction représentées par l'équation

$$\lambda(u^2 + v^2) \varphi^2 - F^2 = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable. Toutes ces courbes appartiennent à un même faisceau tangentiel; elles ont, en particulier, mêmes foyers.

Soit $f(X, Y) = 0$ l'équation en coordonnées rectangulaires d'une courbe quelconque, de degré n et de classe ν : menons les $\mu\nu$ tangentes communes à cette courbe et à l'une des courbes du faisceau précédent, correspondant à la valeur λ du paramètre.

Faisons ensuite varier λ : les $\mu\nu$ points de contact des tangentes communes avec la courbe $f = 0$ vont décrire sur cette courbe $\mu\nu$ arcs; le théorème fondamental est que la somme des longueurs de ces arcs s'exprime à chaque instant en fonction rationnelle de λ et de $\sqrt{\lambda}$.

Introduisons en effet des coordonnées homogènes, en posant $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$ et soient, sur la courbe $f(x, y, z) = 0$, x, y, z les coordonnées d'un des points de contact des tangentes communes à cette courbe et à la courbe $\lambda(u^2 + v^2) \varphi^2 - F^2 = 0$. On aura, en ce point,

$$\lambda(f_x'^2 + f_y'^2) \varphi^2(f_x', f_y', f_z') - F^2(f_x', f_y', f_z') = 0.$$

Si λ prend la valeur $\lambda + d\lambda$, le point x, y, z subit un déplacement infiniment petit sur la courbe $f = 0$, et l'arc correspondant a pour valeur

$$ds = [f_x'^2 + f_y'^2]^{\frac{1}{2}} \frac{d\left(\frac{x}{z}\right)}{f_y'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{F(f_x', f_y', f_z')}{\varphi(f_x', f_y', f_z')} \frac{d\left(\frac{x}{z}\right)}{f_y'}.$$

Il en résulte que ds est une différentielle abélienne, appartenant à la

courbe $f = 0$, et, par suite, en appliquant le théorème d'Abel, et en tenant compte du facteur $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, la somme des $\mu\nu$ arcs élémentaires, qui correspondent aux $\mu\nu$ points de contact considérés plus haut, sera de la forme

$$\Sigma ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi(\lambda) d\lambda,$$

$\psi(\lambda)$ étant une fonction rationnelle de λ . En posant $\sqrt{\lambda} = \theta$, on voit que Σs pourra s'exprimer en fonction rationnelle et logarithmique de θ . Pour approfondir davantage la question, et montrer que les logarithmes doivent disparaître dans cette expression, nous ferons usage d'une formule que nous avons donnée dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel (').

3. Cette formule est la suivante :

Soit $f(x, y, z) = 0$ une courbe algébrique : nous supposerons, ce qui est toujours possible, que x, y, z sont exprimés en fonction holomorphe d'une même variable t , et nous désignerons par $x', x'', \dots, y', \dots, z', \dots$ leurs dérivées successives par rapport à t .

Considérons maintenant une différentielle abélienne quelconque

$$\frac{M(x, y, z)}{N(x, y, z)} d\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{M}{N} \frac{x'z - z'x}{z^2} dt,$$

appartenant à la courbe $f = 0$; M et N désignent des polynômes homogènes en x, y, z , que nous supposerons, pour nous borner au cas des applications ultérieures, de même degré.

Soit de plus la courbe représentée par l'équation

$$\Phi - \lambda \Psi = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable, Φ et Ψ étant deux polynômes homogènes en x, y, z , de degré m . Elle coupe la courbe $f = 0$ en des points de coordonnées x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, mn$), qui deviennent $x_i + dx_i, \dots$ quand λ devient $\lambda + d\lambda$.

(') *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1887.

La formule dont nous ferons usage est exprimée par l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \frac{M(x_i, y_i, z_i)}{N(x_i, y_i, z_i)} d\left(\frac{x_i}{z_i}\right) = -\Sigma r d\lambda,$$

où Σr désigne la somme des résidus, par rapport aux zéros de Nz^2 , de la fonction de t ,

$$\Theta(t) = \frac{M[x(t), \dots]}{N[x(t), \dots]} \frac{x'z - z'x}{z^2} \frac{1}{\frac{\Phi[x(t), \dots]}{\Psi[x(t), \dots]} - \lambda}.$$

6. Pour appliquer cette formule au cas signalé plus haut, il suffit de considérer la différentielle

$$\frac{F(f'_x, f'_y, f'_z)}{\varphi(f'_x, f'_y, f'_z)} \frac{d\left(\frac{x}{z}\right)}{f_y} = \sqrt{\lambda} ds$$

et de prendre pour courbes sécantes celles du faisceau donné par l'équation

$$F^2(f'_x, \dots) - \lambda[f_x'^2 + f_y'^2] \varphi^2(f'_x, \dots) = 0.$$

On a alors, en désignant par x_i, y_i, z_i les coordonnées d'un des points communs à la courbe $f = 0$ et à la courbe du faisceau qui correspond à la valeur λ du paramètre

$$(1) \quad \sqrt{\lambda} \sum_i ds = -d\lambda \Sigma r,$$

où Σr désigne la somme des résidus, par rapport aux zéros de $\varphi(f_x'^2, \dots) f_y' z^2$, de la fonction de t

$$\Theta(t) = \frac{F(f'_x, f'_y, f'_z)}{\varphi(f'_x, f'_y, f'_z)} \frac{x'z - z'x}{z^2 f_y'} \frac{1}{\frac{F^2(f'_x, f'_y, f'_z)}{[f_x'^2 + f_y'^2] \varphi^2(f'_x, \dots)} - \lambda}.$$

Pour déterminer ces résidus remarquons :

1° Que les valeurs de t qui annulent $\varphi(f'_x, \dots)$ ne rendent pas $\Theta(t)$

infini, à cause de la présence au dénominateur de l'expression

$$\frac{F^2(f'_x, \dots)}{\varphi^2(f'_x, \dots)[f_x'^2 + f_y'^2]} - \lambda;$$

2° Que les zéros de f'_y qui ne correspondent pas à un point double de $f = 0$ ne rendent pas non plus $\theta(t)$ infini, puisqu'ils annulent évidemment $x'z - z'x$;

3° Que les valeurs de t qui correspondent à un point double, ou multiple de $f = 0$, non situé sur la droite $z = 0$, rendent $\theta(t)$ nul ou fini, suivant que pour ces valeurs l'expression $\frac{F(f'_x, \dots)}{f'_y \varphi(f'_x, \dots)}$ est nulle, infinie ou finie.

Il en résulte que les seuls zéros de z donnent des résidus de $\theta(t)$ à faire figurer dans l'expression Σr .

Soit α la valeur de t qui correspond à un de ces zéros, que je supposerai d'abord être un zéro simple de $z(t)$.

On peut toujours admettre que la droite $x = 0$ ne passe pas par le point correspondant de la courbe $f = 0$; on a alors en ce point $f'_y \neq 0$.

Posant $t = \alpha + h$, il vient

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{h} \frac{x(\alpha)}{z'(\alpha)} + A + Bh + \dots$$

et

$$\frac{x'z - z'x}{z^2} = -\frac{1}{h^2} \left(\frac{x}{z} \right)'_{\alpha} + B + \dots$$

Si maintenant on pose, pour abréger l'écriture,

$$P = \frac{F(f'_x, \dots)}{f'_y \varphi(f'_x, \dots)}, \quad Q = \frac{F^2(f'_x, \dots)}{[f_x'^2 + f_y'^2] \varphi^2(f'_x, \dots)},$$

il viendra, pour la valeur du résidu de $\theta(t)$ relatif à $t = \alpha$,

$$r_{\alpha} = -\frac{x}{z} \left[\frac{P}{Q - \lambda} \right]',$$

les dérivées étant prises par rapport à t , et t étant remplacé par α .

De la relation

$$\sqrt{\lambda} \Sigma ds = - d\lambda \Sigma r,$$

on tire en intégrant, après division des deux membres par $\sqrt{\lambda}$,

$$\Sigma s = - \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \Sigma r = + \Sigma \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{x}{z'} \right)_\alpha \left[\frac{P}{Q-\lambda} \right]_\alpha'.$$

Le résidu r_α fournit ainsi, dans l'expression de Σs , le terme,

$$\rho_\alpha = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{x}{z'} \right)_\alpha \left[\frac{P}{Q-\lambda} \right]_\alpha' = \frac{x}{z'} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{P'}{Q-\lambda} - \frac{PQ'}{(Q-\lambda)^2} \right],$$

où t doit être remplacé par α dans le second membre.

Pour faire l'intégration, posons $\lambda = \theta^2$; il vient aisément

$$\rho_\alpha = \frac{x}{z'} \left[\frac{2QP' - PQ'}{Q} \int \frac{d\theta}{Q - \theta^2} - \frac{PQ'}{Q} \frac{1}{Q - \theta^2} \right].$$

L'intégrale $\int \frac{d\theta}{Q - \theta^2}$ introduit un terme logarithmique; mais je dis que le coefficient de ce terme est nul.

Observons d'abord que la première expression de ρ_α montre qu'il n'apparaît pas de logarithme si $Q(\alpha)$ est nul; nous supposons donc $Q(\alpha) \geq 0$.

On a

$$\frac{P^2}{Q} = \frac{f_x'^2 + f_y'^2}{f_y'^2}$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{P^2}{Q} = \frac{P}{Q} \frac{2QP' - PQ'}{Q} = \frac{d}{dt} \left[1 + \frac{f_x'^2}{f_y'^2} \right].$$

Si $\frac{P}{Q}(\alpha)$ n'est pas nul, je dis que $\frac{2QP' - PQ'}{Q}$ est nul. On a en effet

$$x f_x' + y f_y' + z f_z' = n f = 0,$$

$$x' f_x' + y' f_y' + z' f_z' = 0;$$

d'où

$$\frac{f_x'}{f_y'} = \frac{y z' - z y'}{z x' - x z'}$$

et

$$\frac{d}{dt} \left[1 + \frac{f_x'^2}{f_y'^2} \right] = 2 \frac{yz' - zy'}{zx' - xz'} \frac{d}{dt} \frac{yz' - zy'}{zx' - xz'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P}{Q} \frac{2QP' - PQ'}{Q} = -2 \frac{(yz' - zy')z}{[zx' - xz']^3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

et, puisque $z(\alpha) = 0$, $z'(\alpha) \geq 0$, on a bien pour $t = \alpha$

$$\frac{2QP' - PQ'}{Q} = 0,$$

ce qui montre que le terme logarithmique disparaît dans ρ_α .

Il reste à examiner le cas où $\frac{P}{Q}(\alpha)$ serait nul. Il faut pour cela que $Q(\alpha)$ soit infini, ou $P(\alpha)$ nul.

Si $Q(\alpha)$ est infini, on voit, puisque $\frac{P}{Q}(\alpha)$ est nul, que ρ_α se réduit à $A \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}$, A étant une constante, et il n'y a pas de logarithme.

Si $P(\alpha)$ est nul, il faut, pour que $Q(\alpha)$ ne soit pas nul, avec le même ordre de multiplicité, ou un ordre de multiplicité supérieur pour le zéro α , que la fonction $\frac{F}{\varphi}(f_x', \dots)$ admette α comme zéro d'ordre p , et que $f_x'^2 + f_y'^2$ admette le même zéro avec l'ordre q , q étant supérieur à p . En ce cas, $\frac{P}{Q}(\alpha)$ admettra le zéro α , avec l'ordre $q - p$, et l'on aura

$$\rho_\alpha = \frac{x}{z'} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \frac{P'(z)}{Q(z) - \lambda}.$$

Le terme logarithmique n'apparaîtra que si l'on a

$$Q(\alpha) \geq 0, \quad P'(\alpha) \geq 0,$$

ce qui exige

$$2p - q = 0, \quad q - p - 1 = 0,$$

d'où

$$p = 1, \quad q = 2.$$

En d'autres termes, P admet α comme zéro simple, et $Q(\alpha)$ n'est pas nul. Si l'on observe maintenant que la condition que $f_x^2 + f_y^2$ s'annule au point considéré revient à dire que ce point, situé par hypothèse sur la droite de l'infini, coïncide avec un des points cycliques du plan, on voit sans difficulté que le terme logarithmique ne peut s'introduire que dans le cas suivant : il faut que la courbe $f = 0$ passe par les points cycliques du plan, et que le point de concours des tangentes en ces points soit un foyer des courbes :

$$F^2 - \lambda(u^2 + v^2) \varphi^2 = 0.$$

Dans tous les autres cas, le terme logarithmique disparaît.

Si l'on suppose maintenant que α est un zéro multiple d'ordre p de $z(t)$, on arrive aisément aux mêmes résultats en observant que α est alors un zéro d'ordre $p - 1$ pour f_x et f_y .

7. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si l'on mène les tangentes communes à une courbe algébrique quelconque et à la courbe représentée en coordonnées tangentielles et rectangulaires par une équation de la forme

$$F^2 - \lambda(u^2 + v^2) \varphi^2 = 0,$$

et si l'on fait ensuite varier cette courbe en modifiant le paramètre λ , la somme algébrique des arcs décrits par les points de contact des tangentes communes sur la courbe fixe est exprimable en fonction rationnelle de $\sqrt{\lambda}$.

Il faut toutefois, en employant les dénominations usitées, qu'un des foyers des courbes mobiles ne coïncide pas avec un des foyers singuliers de la courbe fixe.

8. La somme des arcs dont il est question est donnée, dans le cas où aucune des quantités $\frac{P}{Q}(\alpha)$ n'est nulle, et où les arguments α sont des zéros simples de $z(t)$, par la formule

$$\Sigma s = - \Sigma \left(\frac{x P Q'}{Q z'} \right)_\alpha \frac{1}{Q_\alpha - \lambda} + C,$$

C étant une constante, et la somme du second membre étant étendue aux arguments α , des points à l'infini sur la courbe $f = 0$. On peut débarrasser cette formule de ces arguments, en n'y laissant subsister que des éléments géométriques appartenant à la courbe $f = 0$.

Remarquons en effet que P et Q sont des fonctions rationnelles de degré zéro de x, y, z ; ces fonctions ne dépendent donc en réalité que de $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{d}{dt} Q(x, y, z) \\ &= \frac{d}{dt} Q\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = Q'_y \frac{y'x - x'y}{x^2} + Q'_z \frac{z'x - x'z}{x^2}. \end{aligned}$$

Or, pour $t = \alpha$, z est nul; on peut donc écrire

$$\frac{xPQ'}{Qz'} = \frac{x^2PQ'}{Q(z'x - x'z)} = \frac{P}{Q} Q'_y \frac{y'x - x'y}{z'x - x'z} + \frac{P}{Q} Q'_z.$$

Or, la tangente à la courbe $f = 0$, au point $t = \alpha$, c'est-à-dire l'asymptote qui correspond au point à l'infini considéré, a pour équation

$$ax + by + cz = 0,$$

et l'on a pour ce point

$$\frac{yz' - zy'}{a} = \frac{zx' - xz'}{b} = \frac{xy' - yx'}{c}.$$

Il reste donc enfin, puisque $Q'_y\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = xQ'_y(x, y, z)$,

$$\Sigma s = -\Sigma \frac{Px}{Q(Q-\lambda)} \left[Q'_z - Q'_y \frac{c}{b} \right] + C.$$

Dans cette équation, la somme du second membre s'étend à tous les points à l'infini sur la courbe; $-\frac{c}{b}$ désigne l'ordonnée à l'origine de l'asymptote correspondante.

9. Le théorème général et les formules précédentes s'appliquent également aux arcs interceptés sur la courbe $f = 0$ par deux des courbes du faisceau

$$F^2(x, y, z) - \lambda(f_x'^2 + f_y'^2) \varphi^2(x, y, z) = 0,$$

pourvu que ces courbes ne passent pas toutes par les points cycliques du plan en même temps que la courbe proposée.

Pour calculer la somme de ces arcs, il sera généralement plus simple de partir directement de la formule (1) du n° 6.

Dans toutes les propositions qui précèdent, le signe des arcs se détermine en remarquant que l'on a toujours

$$\sqrt{\lambda} ds = \frac{F dx}{\varphi f_y'}.$$

10. Comme exemple du théorème général, considérons la courbe enveloppe d'une droite de longueur $\frac{b}{\sqrt{\lambda}}$, dont les extrémités s'appuient sur les droites

$$Y = 0 \quad \text{et} \quad aY - bX = 0;$$

cette courbe a pour équation tangentielle

$$u^2(au + bv)^2 - \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

En faisant varier λ , on obtient bien un faisceau homofocal de courbes de direction. Donc :

Si l'on mène à une courbe algébrique toutes les tangentes sur lesquelles deux droites fixes interceptent un segment de longueur l , et si l'on fait ensuite varier cette longueur, les points de contact de la courbe et de chacune des tangentes décrivent sur cette courbe des arcs dont la somme est à chaque instant une fonction rationnelle de l .

11. Le théorème général est susceptible de nombreuses applications; mais la plus intéressante se rapporte certainement au cas où les courbes de direction introduites sont les cercles concentriques $u^2 - \lambda(u^2 + v^2) = 0$, qui ont pour centre l'origine des coordonnées.

La somme des arcs décrits sur la courbe fixe par les points de contact des tangentes communes à cette courbe et à un cercle qui varie, en restant concentrique à lui-même, prend alors une forme très simple, qu'on pourrait déduire des considérations qui précèdent, mais qu'il est plus facile de trouver directement.

12. Soit une tangente touchant la courbe $f = 0$ en un point a et un cercle de centre O et de rayon R , en un point b . Si l'on considère un cercle de centre O et de rayon $R + dR$, une droite voisine de la première touchera f en un point a' , et le cercle en un point b' , respectivement voisins de a et b . On a évidemment, en désignant par $d\omega$ l'angle des deux tangentes ab et $a'b'$,

$$a'b' - ab = aa' - R d\omega,$$

ou, en désignant par t la longueur ab , par ds l'arc aa' ,

$$ds - dt = R d\omega.$$

Si l'on fait la somme de ces relations pour tous les points de contact des tangentes communes à la courbe $f = 0$ et au cercle R , il vient

$$\Sigma ds - \Sigma dt = R \Sigma d\omega.$$

Or $\Sigma d\omega$ est nul; on sait en effet que l'orientation du système des tangentes communes à deux courbes algébriques, n'ayant aucun foyer commun, ne change pas si l'une de ces courbes varie en restant homofocale à elle-même (¹). On a donc

$$\Sigma ds = \Sigma dt,$$

d'où ce théorème :

Si l'on mène les tangentes communes à une courbe algébrique et à un cercle, et si l'on fait ensuite varier le rayon du cercle, son centre demeurant fixe, la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points de contact est à chaque instant égale, à une constante près, à la variation de la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

(¹) Voir notre Mémoire sur le théorème d'Abel (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 358; 1887).

Il faut toutefois que le centre des cercles considérés ne soit pas un foyer de la courbe.

Pour appliquer ce théorème, on remarquera, comme dans le cas général, que la valeur de ds est, le centre des cercles étant à l'origine,

$$ds = \frac{1}{R} \frac{f'_x}{f'_y} dx,$$

et l'on devra attribuer à ds le signe de $\frac{f'_x}{f'_y} dx$; quant à dt , il aura un signe contraire à celui de ds .

13. Supposons que le centre des cercles soit tel que toutes les tangentes menées de ce point à la courbe soient réelles et distinctes : si le rayon des cercles reste inférieur à la plus petite distance du centre à la courbe, les tangentes communes à celle-ci et à l'un quelconque des cercles seront également réelles et distinctes; en appliquant alors le théorème précédent, et prenant pour cercle initial celui dont le rayon est nul, on voit aisément que les tangentes communes à ce cercle et à la courbe sont deux à deux confondues, et que chacune d'elles doit être comptée une fois avec le signe +, une autre fois avec le signe —. De là résulte cette proposition, qui comprend la précédente :

Les 2ν points de contact avec une courbe algébrique de classe ν des tangentes communes à cette courbe et à un cercle peuvent être groupés deux à deux de manière à déterminer sur la courbe ν arcs, dont la somme algébrique est égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

14. Cette proposition, appliquée aux coniques, donne immédiatement le théorème de Chasles : menons en effet les deux tangentes communes à une conique et à un cercle qui la touche en un point M ; soient A et B , A' et B' les points de contact de chacune de ces deux tangentes avec le cercle et la conique. Le théorème précédent donne, en tenant compte de la règle des signes,

$$\text{arc } AM - \text{arc } A'M = \pm (BA - B'A').$$

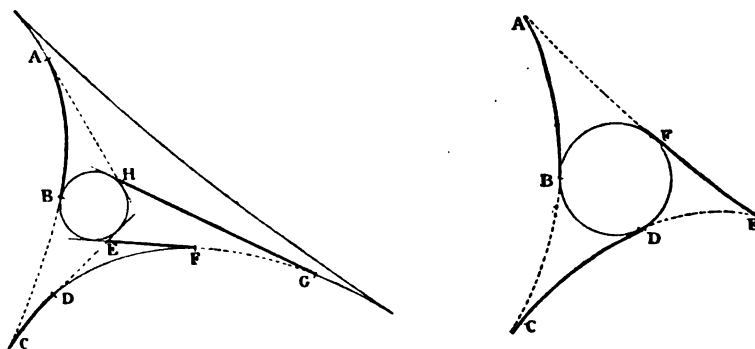
Les deux tangentes communes se coupent en un point P, qui est situé, avec M, sur une conique homofocale à la proposée; on peut écrire

$$\text{arc AM} - \text{arc A'M} = \pm (PA - PA'),$$

ce qui constitue la proposition connue sur la différence de deux arcs de coniques.

On peut donc regarder le théorème donné plus haut comme l'extension à une courbe quelconque du théorème de Chasles sur les arcs de coniques.

15. L'application de ce théorème aux courbes de troisième classe se fait très simplement. Les figures ci-dessous représentent le cas d'une courbe de quatrième degré et de troisième classe, telle que la perspective



de l'hypocycloïde à trois rebroussements; les lignes comptées positivement sont en traits pleins épais; celles comptées négativement sont ponctuées; dans chaque figure la somme des longueurs des lignes en traits pleins est égale à celle des lignes en traits ponctués.

16. Nous indiquerons encore les propositions suivantes, qui se déduisent simplement de la théorie générale, et de la formule qui donne Σds (n° 6).

Si l'on mène à une courbe algébrique, ne passant pas par les points cycliques du plan, les normales tangentes à un même cercle, et si l'on fait ensuite varier le rayon du cercle, son centre demeurant fixe, la somme

algébrique des arcs décrits sur la courbe par les pieds des normales varie proportionnellement au rayon.

Si l'on considère sur une courbe algébrique tous les points pour lesquels le rayon de courbure a une longueur donnée, et si l'on fait ensuite varier cette longueur, la somme algébrique des arcs décrits par les points considérés est nulle.

17. Pour démontrer le premier théorème, par exemple, remarquons que les points de la courbe $f = 0$, où la normale touche le cercle $x^2 + y^2 - \lambda = 0$, sont sur la courbe

$$(xf'_y - yf'_x)^2 - \lambda(f'^2_x + f'^2_y)z^2 = 0.$$

On aura donc pour la somme des différentielles des arcs considérés, d'après la formule (1) du n° 6

$$\sqrt{\lambda} \Sigma ds = - d\lambda \Sigma r,$$

r étant un résidu, par rapport à un zéro de $z(t)$, de la fonction de t ,

$$\theta(t) = \frac{xf'_y - yf'_x}{z} \frac{x'z - z'x}{z^2 f'_y} \frac{1}{\frac{(xf'_y - yf'_x)^2}{z^2(f'^2_x + f'^2_y)} - \lambda}.$$

On peut écrire

$$\theta(t) = \frac{(xf'_y - yf'_x)(x'z - z'x)(f'^2_x + f'^2_y)}{zf'_y[(xf'_y - yf'_x)^2 - \lambda z^2(f'^2_x + f'^2_y)]}.$$

Le résidu correspondant à un zéro α , d'ordre p de z , est

$$r_\alpha = \frac{-p(xf'_y - yf'_x)x(f'^2_x + f'^2_y)}{f'_y(xf'_y - yf'_x)^2} = \frac{-px(f'^2_x + f'^2_y)}{f'_y(xf'_y - yf'_x)}.$$

Or on a

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0,$$

pour tout point de la courbe $f = 0$. Si le point est sur la droite $z = 0$, il reste

$$xf'_x + yf'_y = 0.$$

Il vient alors

$$r_\alpha = \frac{-px(x^2+y^2)}{-x(-x^2-y^2)},$$

si la courbe $f=0$ ne passe par aucun des points cycliques du plan, x^2+y^2 n'est pas nul; r_α est donc égal à $-p$, et, par suite,

$$\Sigma ds = +n \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}},$$

en désignant par n le degré de la courbe $f=0$; on en tire

$$s = 2n\sqrt{\lambda} + C.$$

$\sqrt{\lambda}$ étant le rayon du cercle $x^2+y^2=\lambda$, le théorème est démontré; on peut même le compléter en ajoutant que la variation de la somme des arcs est égale à $2n$ fois celle du rayon.

18. Ce théorème peut être transformé comme celui du n° 12 :

Sur une courbe algébrique de degré n , ne passant pas par les points cycliques du plan, les pieds des 2ν normales menées tangentiellement à un cercle déterminent ν arcs, dont la somme algébrique est égale à $2n$ fois le rayon du cercle.

A cet énoncé, on peut ajouter que ν est la classe de la développée.

19. On démontrerait d'une manière toute semblable les théorèmes suivants.

Appelons *tangente* en un point d'une courbe algébrique la longueur comprise sur la tangente entre le point et une droite fixe; appelons de même *normale* en un point la longueur comprise sur la normale entre le point et la droite fixe.

Si sur une courbe algébrique de degré n , ne passant pas par les points cycliques du plan, on considère les points où la tangente a une longueur donnée, et si l'on fait ensuite varier cette longueur, la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points considérés est égale à $2n$ fois la variation de la longueur de la tangente.

De même :

Si sur une courbe algébrique, ne passant pas par les points cycliques du plan, on considère les points où la normale a une longueur donnée, et si l'on fait ensuite varier cette longueur, la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points considérés est proportionnelle à la variation de la longueur de la normale.

Il faut encore, pour que ce dernier théorème soit applicable, que la courbe n'ait pas d'asymptote parallèle à la droite fixe par rapport à laquelle on prend les normales.



SUR QUELQUES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

PAR M. R. LIOUVILLE.

Il est clair que l'intégrale générale d'une équation différentielle peut être présentée sous une infinité de formes différentes, mais un caractère commun demeure attaché à toutes ces formes quelles que soient les opérations exécutées pour les obtenir. On en est averti par l'équation différentielle même, certaines propriétés des fonctions qui y figurent ne pouvant disparaître, malgré tous les changements de variable et d'inconnue.

Je choisis, par exemple, une équation du second ordre et je suppose que son intégrale s'écrive ainsi

$$(1) \quad \alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y) + \alpha_3 \varphi_3(x, y) = 0,$$

avec trois constantes arbitraires

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3,$$

dont les rapports seuls interviennent. Si l'on définit deux nouvelles variables par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} x = f_1(x_1, y_1), \\ y = f_2(x_1, y_1), \end{cases}$$

qui les lient à x et y , la relation (1), considérée comme exprimant l'une des constantes en fonction linéaire de toutes les autres, n'a subi aucune transformation essentielle. De plus, l'équation différentielle équivalente

à (1) a nécessairement la forme suivante

$$(3) \quad y'' + a_1 y' + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0;$$

a_1, a_2, a_3, a_4 désignent certaines fonctions de x et de y qui sont soumises à deux conditions, comme je le démontrerai plus loin, et la possibilité de représenter l'intégrale générale d'une équation différentielle comme une relation linéaire entre des constantes arbitraires se trouve ainsi l'un de ces caractères invariants dont j'ai parlé.

Les équations différentielles auxquelles il appartient sont l'objet de ce premier travail, et l'on conçoit bien, d'après les explications précédentes, que l'ordre de ces équations est tout au moins égal à deux; mais j'aurai l'occasion de rattacher à mon sujet certaines équations de premier ordre, douées de propriétés qui me semblent curieuses.

Il me faudra souvent emprunter quelques résultats à la théorie des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles. Ces résultats, dont plusieurs, je crois, n'avaient point encore été remarqués, sont réunis dans quelques pages qui constituent la première Partie de ce Mémoire.

CHAPITRE I.

Recherche des conditions que doit remplir un système d'équations linéaires, aux dérivées partielles du second ordre, pour avoir trois ou bien quatre intégrales distinctes. — Définition et propriétés d'un système adjoint. — Procédés d'intégration.

I.

En vue d'abrégier l'écriture, si j'ai désigné par x et y les variables dont dépend une fonction z , je représenterai ses dérivées

$$\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$$

par la notation

$$z^{(i,k)},$$

convenant en outre d'attribuer toujours le premier indice à la variable x , le second à y .

Une équation linéaire du second ordre, satisfaite par la fonction z , s'exprimera donc ainsi qu'il suit

$$(1) \quad \begin{cases} \sum p_{ki} z^{(i,k)} = 0, \\ (i+k \leq 2) \end{cases}$$

à l'aide des six coefficients p_{ki} , liés à x et y par des relations données.

Dans le premier membre de (1), je suppose introduite une fonction z prise à volonté. J'indiquerai simplement par ce signe

$$p(z)$$

le résultat de la substitution, et, quand il y aura lieu de remplacer par cette fonction nouvelle l'inconnue d'une autre équation

$$p_1(z) = 0,$$

j'écrirai

$$p_1 p(z) = 0.$$

Ceci admis, je considère dans le second ordre trois équations linéaires distinctes

$$(2) \quad p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

et, puisqu'il n'est question que de leurs solutions communes, je puis obliger chacune des expressions $p(z)$, $p'(z)$, $p''(z)$ à contenir une seule des dérivées $z^{(i,2-i)}$, de sorte qu'à la valeur 0 de l'indice i réponde la première des équations (2), et ainsi de suite. Alors les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(z)}{\partial x} - \frac{\partial p'(z)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p'(z)}{\partial x} - \frac{\partial p''(z)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

doivent être vérifiées comme conséquences du système (2), pour que ce

lui-ci ait trois solutions indépendantes; les identités

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial p(z)}{\partial x} - \frac{\partial p'(z)}{\partial y} = p_{0,1} p''(z) + (p_{1,0} - p'_{0,1}) p'(z) - p'_{1,0} p(z), \\ \frac{\partial p'(z)}{\partial x} - \frac{\partial p''(z)}{\partial y} = p'_{0,1} p''(z) + (p'_{1,0} - p''_{0,1}) p'(z) - p''_{1,0} p(z) \end{cases}$$

sont donc nécessaires. Ayant lieu, elles entraînent l'intégrabilité des équations différentielles

$$(4) \quad \begin{cases} dz^{(1,0)} + (p''_{0,1} z^{(1,0)} + p''_{1,0} z^{(0,1)} + p''_0 z) dx \\ \quad + (p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z) dy = 0, \\ dz^{(0,1)} + (p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z) dx \\ \quad + (p_{0,1} z^{(1,0)} + p_{1,0} z^{(0,1)} + p_0 z) dy = 0, \\ dz - z^{(1,0)} dx - z^{(0,1)} dy = 0, \end{cases}$$

qui fournissent les trois solutions communes aux équations (2).

Suivant une théorie bien connue de M. Mayer, la recherche de ces solutions n'exige que l'intégration d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre à une seule variable indépendante.

L'élimination de $p(z)$, celle de $p''(z)$ entre les équations (3) sont faciles et de tous points semblables. L'une d'elles, prise pour exemple, conduit à un résultat qui s'écrit ainsi

$$(5) \quad p p'(z) - p' p(z) = 0,$$

quand on représente par

$$p(z), \quad p'(z)$$

les expressions suivantes

$$(6) \quad \begin{cases} p(z) = z^{(0,2)} + p_{0,1} z^{(1,0)} + \left(p_{1,0} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) z^{(0,1)} \\ \quad + \left[\frac{\partial}{\partial y} (p_{1,0} - p'_{0,1}) + (p_{1,0} - p'_{0,1}) \left(p'_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) \right] z, \\ p'(z) = z^{(1,1)} + \left(p'_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} \\ \quad + \left[\frac{2 \partial p'_{1,0}}{\partial y} + p'_{1,0} \left(2 p_{1,0} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) + p'_{0,1} - \frac{\partial p_{1,0}}{\partial x} \right] z; \end{cases}$$

d'ailleurs, si $p(z)$, $p'(z)$ sont choisies de manière à vérifier l'identité (5), on peut, pour déterminer $p''(z)$, s'imposer de satisfaire aux relations (3) qui sont concordantes. De là cette conclusion :

La condition (5) est nécessaire et suffisante pour qu'il existe trois intégrales de ce système

$$(7) \quad p(z) = 0, \quad p'(z) = 0.$$

J'ai regardé comme nuls les seconds membres des trois équations proposées; mais, sans rien ajouter d'essentiel à l'analyse précédente, il est visible qu'on l'étendrait aux cas où cette restriction n'est pas faite. Par suite, en ces cas aussi, les conditions déjà trouvées peuvent seules assurer l'existence de trois solutions communes aux équations qu'on étudie. En outre, les fonctions connues, auxquelles $p(z)$, $p'(z)$, $p''(z)$ ne doivent pas cesser d'être égales, sont assujetties elles-mêmes aux relations (3).

Ceci dit, je reprends l'examen des équations (2) et j'imagine qu'au lieu de les donner toutes trois on ait choisi seulement l'une d'entre elles,

$$v'(z) = 0,$$

et une combinaison linéaire des deux autres

$$(8) \quad p'''(z) = p''(z) + p_{2,0}'' p(z) = 0.$$

Remplaçant $p''(z)$ par son expression déduite de cette formule, on change les relations (3) en les suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p'(z)}{\partial y} - \frac{\partial p(z)}{\partial x} = (p_{0,1}' - p_{1,0})p'(z) \\ \quad + (p_{1,0}' + p_{0,1}'' p_{2,0}'')p(z) - p_{0,1}''' p'''(z), \\ \frac{\partial p'''(z)}{\partial y} - \frac{\partial p'(z)}{\partial x} = (p_{0,1}''' - p_{1,0}')p'(z) + \frac{\partial}{\partial y} [p_{2,0}'' p(z)] \\ \quad + (p_{1,0}''' + p_{0,1}' p_{2,0}'')p(z) - p_{0,1}''' p'''(z). \end{array} \right.$$

D'après (8), les équations

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0$$

ont tout au moins trois intégrales communes; substituées à z dans les identités (9), ces intégrales se présentent comme remplissant les deux conditions

$$(10) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial p(z)}{\partial x} + (p'_{1,0} + p_{0,1} p''_{2,0}) p(z), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial y} [p''_{2,0} p(z)] + (p''_{1,0} + p'_{0,1} p''_{2,0}) p(z). \end{cases}$$

Or on en conclut

$$(11) \quad v(z) = 0$$

ou bien

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log p(z)}{\partial x} + p'_{1,0} + p_{0,1} p''_{2,0} = 0, \\ \frac{\partial \log p(z)}{\partial y} + p'_{0,1} + \frac{p''_{1,0}}{p''_{2,0}} + \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

La première hypothèse signifie que toute intégrale de

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0$$

appartient aussi à

$$p(z) = 0;$$

ces équations ont alors trois solutions communes et non davantage. La seconde hypothèse ne peut être admise que si

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial y} (p'_{1,0} + p_{0,1} p''_{2,0}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p'_{0,1} + \frac{p''_{1,0}}{p''_{2,0}} + \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial y} \right),$$

et, cette condition ayant lieu, des relations (12) on déduit $p(z)$ par une quadrature; j'en écris le résultat sous la forme

$$(14) \quad \log \left(\frac{1}{p} \right) = \int (p'_{1,0} + p_{0,1} p''_{2,0}) dx + \left(p'_{0,1} + \frac{p''_{1,0}}{p''_{2,0}} + \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial y} \right) dy.$$

L'équation

$$(14) \quad p(z) = p$$

renferme toutes les solutions du système

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0,$$

pour lesquelles il n'arrive pas que $p(z)$ s'évanouisse. Mais, à chaque valeur de p , ces dernières correspondent au nombre de trois, puisque les relations (9) sont vérifiées, avec celles qui sont exigées de la fonction p , et, parmi les intégrales communes à

$$p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0,$$

deux sont déjà données par l'équation (14) ⁽¹⁾; la troisième ne peut l'être.

Il s'ensuit que les équations proposées

$$(15) \quad p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0$$

possèdent en commun quatre intégrales distinctes qui appartiennent en outre à l'équation

$$p(z) = \alpha p,$$

pourvu que par

$$\alpha$$

on désigne une constante arbitraire, pouvant être nulle.

Soit posé

$$\sum p_{k,i}'' z^{(i,k)} = p'''(z), \\ (i + k \leq 2),$$

de sorte que

$$p_{0,1}'' = p_{0,1}''' - p_{0,1} p_{2,0}''', \\ p_{1,0}'' = p_{1,0}''' - p_{1,0} p_{2,0}'''.$$

Ces formules, comparées à (9) et (12), permettent d'y effacer toute trace de $p''(z)$.

J'ajoute que, à cause de (14), l'une des relations (9) contient $p(z)$ dans ce seul terme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p(z)}{p} \right],$$

(1) Comme différence des solutions qui rendent $p'(z) = 0$, $p''(z) = 0$.

la seconde dans celui-ci

$$-\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{p(z)}{p} \right];$$

avec $p'(z)$ et $p'''(z)$ il est donc aisé de former une identité semblable à (5)

$$(16) \quad p^{(iii)} p'(z) - p^{(i)} p'''(z) = 0,$$

où les coefficients $p_{k,i}$ ne peuvent figurer qu'en apparence, car $p(z)$ n'y entre pas; elle est d'ailleurs strictement équivalente aux relations (9), qui l'ont fournie et, par conséquent, suffit pour assurer au système (15) quatre intégrales indépendantes. Elles se déduisent des équations différentielles auxquelles ces quatre inconnues

$$z^{(1,1)}, \quad z^{(1,0)}, \quad z^{(0,1)}, \quad z$$

satisfont visiblement d'après (15), et dont l'intégrabilité n'exige rien autre chose, selon les explications précédentes, que l'identité (16).

La méthode indiquée de M. Mayer fait alors consister tout le problème en l'étude d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, où l'on n'a qu'une variable à considérer.

On rencontre un cas d'une simplicité particulière, quand,

$$p(z), \quad p'(z)$$

étant les premiers membres des équations proposées, l'une des relations (3) cesse de contenir $p''(z)$ et, par suite, s'exprime ainsi

$$(17) \quad \frac{\partial p'(z)}{\partial \gamma} - \frac{\partial p(z)}{\partial x} = (p'_{0,1} - p_{1,0}) p'(z) + p'_{1,0} p(z);$$

l'équation $p'(z) = 0$ s'intègre alors par les transformations de Laplace, et même dès la seconde opération.

Je ne m'arrête pas à démontrer ce théorème : il n'y aurait qu'à remplacer $p'(z)$ par zéro dans la formule (17), l'expression correspondante de $p(z)$, déduite de là par une quadrature, renferme une fonction arbitraire de γ . Je remarque seulement que $p''(z)$ est connu, hormis le cas dont il s'agit, si l'on a donné $p(z)$ et $p'(z)$, de sorte que les intégrales com-

munes à deux équations de cette espèce

$$\begin{aligned} z^{(0,2)} + p_{0,1} z^{(1,0)} + p_{1,0} z^{(0,1)} + p_0 z &= 0 = p(z), \\ z^{(1,1)} + p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z &= 0 = p'(z) \end{aligned}$$

satisfont à une troisième équation semblable et déterminée

$$z^{(2,0)} + p''_{0,1} z^{(1,0)} + p''_{1,0} z^{(0,1)} + p''_0 z = 0 = p''(z),$$

à moins que l'identité (17) soit vérifiée.

II.

Soient

$$p(z), \quad p'(z), \quad p''(z)$$

les premiers membres de trois équations aux dérivées partielles, linéaires, et admettant trois intégrales communes, définies au reste, comme je l'ai dit au § I, de façon que les identités

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p'(z)}{\partial y} - \frac{\partial p(z)}{\partial x} = p'_{1,0} p(z) + (p'_{0,1} - p_{1,0}) p'(z) - p_{0,1} p''(z), \\ \frac{\partial p''(z)}{\partial y} - \frac{\partial p'(z)}{\partial x} = p''_{1,0} p(z) + (p''_{0,1} - p'_{1,0}) p'(z) - p'_{0,1} p''(z) \end{cases}$$

soient vérifiées.

Pour obtenir une intégrale commune aux équations données, je puis imaginer qu'on leur adjoigne des relations en nombre suffisant, c'est-à-dire au nombre de trois, qui déterminent à la fois l'inconnue et ses deux dérivées du premier ordre.

L'une de ces équations est, par exemple, la suivante :

$$(2) \quad q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(0,1)} + q_0 z = q,$$

ou bien, afin d'abrégier,

$$q(z) = q.$$

Comme il faut qu'elle s'accorde avec ce système,

$$(3) \quad p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

sans le soumettre à aucune restriction, toute équation entre $z^{(1,0)}$, $z^{(0,1)}$ et z , conclue des précédentes, doit se réduire à l'équation (2), de sorte que, pour toute intégrale de (3), on peut écrire

$$(4) \quad \frac{\partial q(z)}{\partial x} = \sigma q(z), \quad \frac{\partial q(z)}{\partial y} = \sigma' q(z),$$

σ , σ' désignant des fonctions où n'entrent ni z , ni ses différentielles.

Il est clair que les relations (4) et ces identités

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial q(z)}{\partial x} - q_{0,1} p''(z) - q_{1,0} p'(z) = \sigma q(z), \\ \frac{\partial q(z)}{\partial y} - q_{0,1} p'(z) - q_{1,0} p(z) = \sigma' q(z) \end{cases}$$

sont une même chose. Celles-ci d'ailleurs exigent que les coefficients de l'équation (2) soient liés à σ par ces formules

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - p_{0,1}'' q_{0,1} - p_{0,1}' q_{1,0} + q_0 = \sigma q_{0,1}, \\ \frac{\partial q_{1,0}}{\partial x} - p_{1,0}'' q_{0,1} - p_{1,0}' q_{1,0} = \sigma q_{1,0}, \\ \frac{\partial q_0}{\partial y} - p_0'' q_{0,1} - p_0' q_{1,0} = \sigma q_0, \end{cases}$$

et à σ' par les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} - p_{0,1}' q_{0,1} - p_{0,1} q_{0,1} = \sigma' q_{0,1}, \\ \frac{\partial q_{1,0}}{\partial y} - p_{1,0}' q_{0,1} - p_{0,1} q_{1,0} + q_0 = \sigma' q_{1,0}, \\ \frac{\partial q_0}{\partial y} - p_0' q_{0,1} - p_0 q_{1,0} = \sigma' q_0, \end{cases}$$

tandis que de (4) on déduit

$$(8) \quad \sigma = \frac{\partial \log q}{\partial x}, \quad \sigma' = \frac{\partial \log q}{\partial y}.$$

L'un des coefficients de (2) étant arbitraire, j'en dispose en prenant

$$\frac{1}{q} = p_{0,1};$$

la première des équations (7) devient

$$(9) \quad q_{1,0} = \frac{1}{p_{0,1}} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} + \left(\frac{1}{p_{0,1}} \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} - \frac{p'_{0,1}}{p_{0,1}} \right) q_{0,1},$$

à cause des relations (8), et l'expression (9), portée dans la deuxième équation (6), la change en celle-ci :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 q_{0,1}}{\partial x \partial y} - \left(p'_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - p'_{1,0} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} \\ &+ \left[p'_{1,0} \left(p'_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(p'_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) - p_{0,1} p''_{1,0} \right] q_{0,1}, \end{aligned} \right.$$

qui est linéaire et se rattache sans peine à une équation déjà rencontrée, je veux dire celle que j'ai représentée au paragraphe précédent par

$$(11) \quad p'(z) = 0.$$

Que l'on pose, en effet,

$$\begin{aligned} p'(z) &= \sum p'_{k,i} z^{(i,k)}, \\ (i+k &\leq 2); \end{aligned}$$

grâce aux relations (6, §1), entre les coefficients $p'_{k,i}$ et ceux du système (3), l'équation (10) s'écrit aussi

$$(12) \quad 0 = \frac{\partial^2 q_{0,1}}{\partial x \partial y} - p'_{0,1} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - p'_{1,0} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} + \left(p'_{1,0} - \frac{\partial p'_{0,1}}{\partial x} - \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} \right) q_{0,1} = 0,$$

de sorte que, définissant comme je l'ai fait ailleurs (*Journal de l'École Polytechnique*, LVI^e Cahier), l'adjointe d'une équation linéaire aux dérivées partielles, l'équation (12) est l'adjointe de (11). Je la représente par

$$(13) \quad P'(q_{0,1}) = 0,$$

et je rappelle sa signification précise en disant que toute équation linéaire

$$\sum p'_{k,i} z^{(i,k)} = 0 \\ (i + k \leq 2)$$

se met sous cette forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

quand on la multiplie par une intégrale de l'équation adjointe,

$$\sum (-1)^{(i+k)} \frac{\partial^{(i+k)} (p'_{k,i} z)}{\partial x^i \partial y^k}.$$

Je reviens aux relations (6) et (7) : l'expression (9), portée dans la première équation (6) et dans la deuxième équation (7), donne pour q_0 deux formules; on conclut de leur comparaison

$$(14) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 q_{0,1}}{\partial y^2} - p_{0,1} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - \left(p_{1,0} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} \\ &+ q_{0,1} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} - p'_{0,1} \right) + p_{0,1} \left(p''_{0,1} - p'_{1,0} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + (p'_{0,1} - p_{1,0}) \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} - p'_{0,1} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette équation encore est linéaire et,

$$(15) \quad p(z) = 0$$

étant la première équation (6) du paragraphe précédent, elle s'exprime visiblement ainsi

$$\frac{\partial^2 q_{0,1}}{\partial y^2} - p_{0,1} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - p_{1,0} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} + \left(p_0 - \frac{\partial p_{0,1}}{\partial x} - \frac{\partial p_{1,0}}{\partial y} \right) q_{0,1} = 0;$$

par où l'on voit que, si

$$P(z) = 0$$

est l'adjointe de (15), la suivante

$$(16) \quad P(q_{0,1}) = 0$$

se confond avec (14).

Les équations (13) et (16) sont de même espèce que (3). Elles admettent $q_{0,1}$ pour intégrale commune; de plus, à l'aide de cette intégrale, tous les coefficients de l'équation (2) sont donnés par les formules

$$(17) \quad \begin{cases} q_{1,0} = \frac{1}{p_{0,1}} \left[\frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} + q_{0,1} \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} - p'_{0,1} \right) \right], \\ q_0 = \left(p''_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial x} \right) q_{0,1} + p'_{0,1} q_{1,0} - \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x}, \\ q = \frac{1}{p_{0,1}}, \end{cases}$$

où rien d'arbitraire ne subsiste. Comme aux équations (3) appartiennent pourtant trois solutions, il faut qu'il y ait, pour $q_{0,1}$, trois déterminations différentes. C'est dire que le système

$$(18) \quad P(z) = 0, \quad P'(z) = 0$$

possède trois intégrales distinctes. J'ai dit, à la fin du § I, qu'on en conclut une troisième équation semblable à (18), satisfaite par ces mêmes intégrales; mais celle-ci résulte des relations (6) avec une égale simplicité, et voici comment elle s'exprime :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 q_{0,1}}{\partial x^2} - \left(p''_{0,1} - \frac{2 \partial \log p_{0,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - \frac{1}{p_{0,1}} \left(\frac{\partial p'_{0,1}}{\partial x} + p'_{0,1} p'_{1,0} - p'_0 \right) \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} \\ &+ \left\{ \frac{1}{p_{0,1}} \left(p'_{0,1} - \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial p'_{0,1}}{\partial x} + p'_{0,1} p'_{1,0} - p'_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p_{0,1}} \left[\frac{\partial (p_{0,1} p''_{0,1})}{\partial x} - \frac{\partial^2 p_{0,1}}{\partial x^2} \right] \right\} q_{0,1}. \end{aligned} \right.$$

Les conditions (6) et (7) ne peuvent au reste fournir une équation, qui contienne $q_{0,1}$, sans se réduire à (19), (14) ou (10). Différente de ces dernières, elle ne renfermerait que les coefficients des équations (3) et, par suite, serait satisfaite d'elle-même, en vertu des identités (1).

Il est aisé de vérifier cette conclusion par un calcul direct, que je supprime pour abréger.

D'après un résultat obtenu plus haut, les équations

$$P(z) = 0, \quad P'(z) = 0,$$

ayant trois solutions communes, satisfont à une identité

$$(20) \quad \mathfrak{Q}'P(z) - \mathfrak{Q}P'(z) = 0,$$

semblable à (5, § 1). Deux équations nouvelles

$$(21) \quad \mathfrak{Q}(z) = 0, \quad \mathfrak{Q}'(z) = 0,$$

de même espèce que (18), servent à la former, et l'on connaît leurs coefficients quand ceux des équations (3) sont donnés. Or on remarque, en calculant les équations (21), qu'à l'une d'elles est adjointe $p(z) = 0$, à l'autre $p'(z) = 0$. Je puis donc énoncer cette proposition :

Quand le système

$$(3) \quad p(z) = 0, \quad p'(z) = 0$$

admet trois solutions indépendantes, il existe une relation identique

$$(22) \quad {}_p p'(z) - {}_p' p(z) = 0,$$

où entrent les équations proposées avec deux autres de même espèce; et, si

$$p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad {}_p(z) = 0, \quad {}_p'(z) = 0$$

ont respectivement pour adjointes

$$\mathfrak{Q}(z) = 0, \quad \mathfrak{Q}'(z) = 0, \quad P(z) = 0, \quad P'(z) = 0,$$

l'identité (22) entraîne la suivante :

$$(23) \quad \mathfrak{Q}'P'(z) - \mathfrak{Q}'P(z) = 0.$$

De plus les solutions du système (3) et leurs dérivées du premier ordre satisfont à des équations linéaires

$$q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(2,1)} + q_0 z = q,$$

dont les coefficients sont liés aux intégrales de ce système

$$(24) \quad P(Z) = 0, \quad P'(Z) = 0,$$

par les formules que je transcris

$$(25) \begin{cases} q_{0,1} = Z, \\ q_{1,0} = \frac{1}{p_{0,1}} \left[\frac{\partial Z}{\partial y} + Z \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} - p'_{0,1} \right) \right], \\ q_0 = \frac{p'_{0,1}}{p_{0,1}} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \left[p''_{0,1} - \frac{d \log p_{0,1}}{dx} + \frac{p'_{0,1}}{p_{0,1}} \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial y} - p'_{0,1} \right) \right], \\ q = \frac{1}{p_{0,1}}. \end{cases}$$

Je dirai que les systèmes (24) et (3) sont *adjoints* l'un de l'autre, et, cette définition admise, on voit que je saurai toujours intégrer à la fois deux systèmes adjoints, tels que ceux qui précèdent.

Ceci convient aux équations, telles que (3), ayant trois solutions communes. Le système (15, § I), qui a quatre intégrales indépendantes, jouit de propriétés analogues; voici comment on peut s'en convaincre.

Soit, avec les notations dont j'ai déjà fait usage,

$$(26) \quad p(z) = \alpha p$$

une équation qu'il soit permis de joindre aux deux proposées

$$(27) \quad p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0,$$

pour en déterminer les intégrales communes. L'expression p , comme l'on sait, est donnée par les relations

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log p}{\partial x} = - (p'_{1,0} + p_{0,1} p''_{2,0}), \\ \frac{\partial \log p}{\partial y} = - \left(p'_{0,1} + \frac{p'_{1,0}}{p''_{2,0}} + \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial y} \right), \end{cases}$$

tandis que, à cause des identités (1),

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p''_0 + p'_{1,0} (p'_{1,0} - p''_{0,1}) + p''_{1,0} (p'_{0,1} - p_{1,0}) - \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p'_0 - p'_{0,1} p'_{1,0} + p_{0,1} p''_{1,0} - \frac{\partial p_{1,0}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p_{0,1}}{\partial x} + p_0 + p_{0,1} (p'_{1,0} - p''_{0,1}) + p'_{0,1} (p'_{0,1} - p_{1,0}) - \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

On tire des équations (28)

$$p_{0,1} \quad \text{et} \quad p'_{1,0};$$

d'autre part,

$$(30) \quad \begin{cases} p'''_{k,i} = p''_{k,i} + p'''_{2,0} p_{k,i} \\ (i + k \leq 1), \end{cases}$$

et ces expressions, substituées dans la deuxième des équations (29), la changeant en la suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p'_0 - p'_{0,1} p'_{1,0} + \left(p'_{1,0} + \frac{\partial \log p}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \log p}{\partial y} + p'_{0,1} + \frac{\partial \log p'''_{2,0}}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'''_{1,0}}{p'''_{2,0}} + p'_{0,1} + \frac{\partial \log p'''_{2,0}}{\partial y} + \frac{\partial \log p}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

ou bien, puisque

$$\frac{\partial \log p}{\partial x} \frac{\partial \log p}{\partial y} - \frac{\partial^2 \log p}{\partial x \partial y} = p \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial x \partial y},$$

en celle-ci

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial x \partial y} - \left(p'_{0,1} + \frac{\partial \log p'''_{2,0}}{\partial y} \right) \frac{\partial \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial x} - p'_{1,0} \frac{\partial \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial y} \\ & + \frac{1}{p} \left[p'_0 + \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p'_{1,0} \frac{\partial \log p'''_{2,0}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'''_{1,0}}{p'''_{2,0}} + p'_{0,1} + \frac{\partial \log p'''_{2,0}}{\partial y} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Je multiplie maintenant la dernière équation (29) par $p'''_{2,0}$ et j'ajoute le produit à la première, en tenant compte des relations (30); l'équation résultante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p'''_{2,0} \frac{\partial p_{0,1}}{\partial x} + p'''_0 + (p'_{1,0} - p'_{0,1})(p'_{1,0} + p'''_{2,0} p_{0,1}) \\ + (p'_{0,1} - p'_{1,0})(p'_{1,0} + p'''_{2,0} p'_{0,1}) - \left(\frac{\partial p'_{1,0}}{\partial x} + p'''_{2,0} \frac{\partial p'_{0,1}}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

se transforme au moyen du système (28) et devient

$$\begin{aligned} p_0'' - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_{2,0}'' \frac{\partial \log p}{\partial y} + p_{0,1}' p_{2,0}'' + \frac{\partial p_{2,0}''}{\partial y} \right) - p_{2,0}'' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_{1,0}''}{p_{2,0}''} + \frac{\partial \log p}{p_{2,0}'' \partial x} \right) \\ - \frac{\partial p_{1,0}'}{\partial x} + \left(p_{0,1}'' + \frac{\partial \log p}{\partial x} \right) \frac{\partial \log p}{\partial x} \\ - p_{2,0}'' \frac{\partial p_{0,1}'}{\partial y} + \left(\frac{\partial p_{2,0}''}{\partial y} + p_{2,0}'' \frac{\partial \log p}{\partial y} \right) \left(\frac{p_{1,0}''}{p_{2,0}''} + \frac{\partial \log p_{2,0}''}{\partial y} + \frac{\partial \log p}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial x^2} + p_{2,0}'' \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial y^2} - \left(p_{0,1}'' + \frac{\partial \log p_{2,0}''}{\partial x} \right) \frac{\partial \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial x} - \left(p_{1,0}'' + \frac{\partial p_{2,0}''}{\partial y} \right) \frac{\partial \left(\frac{1}{p} \right)}{\partial y} \\ & + \left[p_0'' - \frac{2 \partial p_{1,0}'}{\partial x} + \left(\frac{p_{1,0}''}{p_{2,0}''} - p_{0,1}' \right) \frac{\partial p_{2,0}''}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + p_{1,0}' \frac{\partial \log p_{2,0}''}{\partial x} - p_{2,0}'' \left(\frac{2 \partial p_{0,1}'}{\partial y} + \frac{\partial^2 \log p_{2,0}''}{\partial y^2} \right) \right] \frac{1}{p} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (31) et (32) contiennent linéairement $\frac{1}{p}$ et ses dérivées des deux premiers ordres. D'ailleurs, cette fonction connue,

$$p_{1,0}, \quad p_{0,1} \quad \text{et} \quad p_0$$

s'en déduisent sans ambiguïté par les formules (29); en conséquence, et

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0$$

possédant quatre intégrales communes, il doit y avoir pour $\frac{1}{p}$ tout autant de déterminations distinctes; c'est dire que le système (31), (32), semblable à (27), admet, comme ce dernier, quatre intégrales indépendantes. Mais celui-ci donne lieu à une identité

$$(16, \S I) \quad r^{(iii)} p'(z) - r^{(i)} p'''(z) = 0,$$

obtenue en éliminant $p(z)$ des relations (9, § I) ou, plus simplement,

par un calcul direct; $p^{(i)}(z)$, $p^{(iii)}(z)$ s'expriment comme il suit :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} p^{(i)}(z) &= z^{(1,1)} + p'_{0,1} z^{(1,0)} + \left(p'_{1,0} - \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial x} \right) z^{(0,1)} \\ &\quad + \left[p'_0 - p'_{0,1} \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial x} + \frac{2 \partial p'_{1,0}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p''_{1,0}}{p''_{2,0}} + \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial y} \right) \right] z, \\ p^{(iii)}(z) &= z^{(2,0)} + p''_{2,0} z^{(0,2)} + \left(p''_{0,1} - \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial x} \right) z^{(1,0)} + \left(p''_{1,0} + \frac{\partial p''_{2,0}}{\partial y} \right) z^{(0,1)} \\ &\quad + \left[\frac{\partial p''_{0,1}}{\partial x} + \frac{\partial p''_{1,0}}{\partial y} + p''_0 - \frac{2 \partial p'_{1,0}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - 2 p''_{2,0} \frac{\partial p'_{0,1}}{\partial y} + (p'_{1,0} - p''_{0,1}) \frac{\partial \log p''_{2,0}}{\partial x} - p'_{0,1} \frac{\partial p''_{2,0}}{\partial y} \right] z. \end{aligned} \right.$$

Si l'on y prend pour inconnue

$$\frac{z}{p''_{2,0}}$$

au lieu de z , en réduisant à l'unité les coefficients de $z^{(1,1)}$, $z^{(2,0)}$, l'on voit qu'à l'une des équations formées de cette manière est adjointe l'équation (31), à l'autre équation (32). Je représente ainsi,

$$(34) \quad P^{(i)}\left(\frac{1}{p \cdot p''_{2,0}}\right) = 0, \quad P^{(iii)}\left(\frac{1}{p \cdot p''_{2,0}}\right) = 0$$

ces dernières, et, puisqu'elles ont quatre intégrales communes, il existe une relation identique

$$(35) \quad \mathcal{P}''' P^{(i)}(z) - \mathcal{P}' P^{(iii)}(z) = 0$$

qu'elles doivent vérifier. Les équations

$$\mathcal{P}'(z) = 0, \quad \mathcal{P}'''(z) = 0,$$

déduites de

$$P^{(i)}(z) = 0, \quad P^{(iii)}(z) = 0,$$

comme l'étaient

$$p^{(i)}(z) = 0, \quad p^{(iii)}(z) = 0$$

des deux proposées, se trouvent être les adjointes de celle ci, et cette con-

clusion, tirée des formules (33), achève de démontrer le théorème suivant :

Quand le système

$$(27) \quad p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0$$

admet quatre intégrales indépendantes, il y a une relation identique

$$(36) \quad p^{(iv)}(z) - p^{(iv)}(z) = 0$$

où entrent, avec les équations (27), deux autres équations de même espèce

$$p^{(iv)}(z) = 0, \quad p^{(iv)}(z) = 0,$$

et si

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0, \quad p^{(iv)}(z) = 0, \quad p^{(iv)}(z) = 0$$

ont respectivement pour adjointes

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0, \quad p^{(iv)}(z) = 0, \quad p^{(iv)}(z) = 0,$$

l'identité (36) entraîne la suivante :

$$(37) \quad p' p^{(iv)}(z) - p''' p^{(iv)}(z) = 0.$$

De plus, les solutions de (27) et leurs dérivées des deux premiers ordres satisfont à des équations linéaires

$$\sum p_{k,i} z^{(i,k)} = p, \quad (i + k \leq 2),$$

dont les coefficients sont liés aux intégrales de

$$(38) \quad p^{(iv)}(Z) = 0, \quad p^{(iv)}(Z) = 0,$$

par ces formules

$$\begin{aligned} p_{2,0} &= 1, & p_{1,1} &= 0 = p_{0,2}, & p &= \frac{1}{p_{2,0}'' Z}, \\ p_{0,1} &= \frac{-1}{p_{2,0}''} \left[p_{1,0}' + \frac{\partial \log}{\partial x} \left(\frac{1}{p_{2,0}'' Z} \right) \right], \\ p_{1,0} &= \frac{p_{1,0}''}{p_{2,0}''} + p_{0,1}' - \frac{\partial \log Z}{\partial y}, \\ p_0 &= - \left\{ \frac{\partial p_{0,1}}{\partial x} - p_{0,1} \left[p_{0,1}'' + \frac{\partial \log}{\partial x} \left(\frac{1}{p_{2,0}'' Z} \right) \right] + p_{0,1}' (p_{0,1}' - p_{1,0}) - \frac{\partial p_{0,1}'}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Il convient d'appeler *adjoints* deux systèmes ayant entre eux la même dépendance que (27) et (38) et, comme ceux-ci, doués de quatre intégrales distinctes; on a vu que l'intégration de l'un d'eux entraîne celle de l'autre sans nulle difficulté.

Avant de terminer cet article, je veux indiquer une conséquence assez curieuse des résultats qui viennent d'être obtenus. Si deux équations telles que celles-ci,

$$v'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0,$$

ont quatre ou trois intégrales communes, elles vérifient une identité

$$(36) \quad p^{(iii)} p'(z) - p^{(ii)} p'''(z) = 0,$$

dans laquelle z est quelconque. A toute solution de

$$(39) \quad p'(z) = 0$$

il répond donc, par la formule $p'''(z) = \zeta$, une solution de

$$(40) \quad p^{(ii)}(\zeta) = 0,$$

et le système

$$(41) \quad p'(z) = 0, \quad p'''(z) = \zeta$$

où ζ n'est définie que par l'équation (40), à quatre ou trois intégrales distinctes; cela étant, lorsque l'équation (40) se résout, à l'aide des transformations de Laplace, c'est-à-dire avec une fonction arbitraire, au moins, dégagée du signe \int , l'intégrale générale de $p'(z) = 0$, qui est celle du système (41) pour toutes les valeurs de ζ , paraît s'exprimer par des arbitraires d'une nouvelle espèce. On est par là conduit à rechercher si cette remarque permet d'étudier des équations auxquelles les procédés connus ne soient point applicables, en d'autres termes s'il arrive que l'équation (40) soit intégrable par la méthode de Laplace, alors même que l'équation (39) ne l'est pas. Or l'identité (36) entraîne, je l'ai dit, la suivante

$$p' p^{(iii)}(z) - p^{(ii)} p'''(z) = 0,$$

et, comme deux équations adjointes se résolvent toujours à la fois par les transformations de Laplace, l'équation (40) ne peut admettre cette résolution selon l'hypothèse, sans que

$$P^{(n)}(z) = 0$$

le fasse aussi; mais, quand z est l'intégrale générale de cette dernière équation

$$P^{(m)}(z) = Z$$

contient une fonction arbitraire, au moins, dégagée du signe \int et satisfait à l'équation

$$Q'(z) = 0,$$

qui, par suite, se prête à l'intégration de Laplace; il en est donc de même pour son adjointe

$$p'(z) = 0.$$

Ainsi, quand l'équation (40) est de celles qui ont une intégrale générale explicite, l'équation corrélatrice (39) appartient à cette même classe, peut être étudiée d'une manière directe, et c'est ce que nous voulions établir.

III.

Pour trouver les trois solutions communes aux équations

$$(1) \quad p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

j'ai remarqué que, d'après une méthode connue, tout se réduit à intégrer une équation différentielle linéaire du troisième ordre avec une seule variable indépendante. Mais cette équation même contient un paramètre qu'il faut laisser entièrement arbitraire, et il est aisé d'imaginer ce qu'une pareille obligation comporte de difficultés. Je vais d'abord indiquer un cas où l'on parvient à les éviter toutes, j'étudierai ensuite les moyens de ramener à ce cas l'ensemble des autres.

Je suppose que l'intégrale générale de l'équation

$$(2) \quad p'(z) = 0$$

soit donnée par la méthode de Laplace, et d'une façon immédiate; c'est dire qu'on a, par exemple,

$$(3) \quad \frac{\partial p'_{0,1}}{\partial x} + p'_{0,1} p'_{1,0} - p'_0 = 0,$$

de sorte que les solutions du système (1) sont contenues dans la formule

$$(4) \quad z^{(0,1)} + p'_{0,1} z = Y e^{-\int p'_{1,0} dx},$$

où Y ne dépend pas de x . J'abrègerai l'écriture en posant

$$(5) \quad e^{-\int p'_{1,0} dx} = \varpi;$$

à cause de (1), l'équation (4), différenciée en y , exige la suivante

$$-p_{0,1} z^{(1,0)} + (p'_{0,1} - p_{1,0}) z^{(0,1)} + \left(\frac{\partial p'_{0,1}}{\partial y} - p_0 \right) z = \varpi \left(Y' + Y \frac{\partial \log \varpi}{\partial y} \right),$$

d'où l'on voit qu'il résulte

$$z^{(1,0)} = z \left(p'_{1,0} - p'_{0,1} + \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial x} \right) - \frac{\varpi}{p_{0,1}} \left[Y' + Y \left(p_{1,0} - p'_{0,1} + \frac{\partial \log \varpi}{\partial y} \right) \right],$$

à moins que $p_{0,1}$ s'évanouisse. Je laisse pour le moment cette hypothèse, et j'admets la relation précédente; ce qu'on en déduit, par une différenciation nouvelle, se représente ainsi

$$(6) \quad \lambda z = \varpi (Y'' + \mu Y' + \nu Y)$$

et entraîne par conséquent

$$(7) \quad \begin{cases} Y''' + \left[\mu + \frac{\partial \log}{\partial y} \left(\frac{\varpi}{\lambda} \right) + p'_{0,1} \right] Y'' \\ + \left\{ \nu + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left[p'_{0,1} + \frac{\partial \log}{\partial y} \left(\frac{\varpi}{\lambda} \right) \right] \right\} Y' \\ + \left\{ \frac{\partial \nu}{\partial y} - \lambda + \nu \left[p'_{0,1} + \frac{\partial \log}{\partial y} \left(\frac{\varpi}{\lambda} \right) \right] \right\} Y = 0, \end{cases}$$

pourvu que λ ne soit pas nul.

Les coefficients de cette équation ne peuvent dépendre de x ; au reste, la formule (6) fait connaître z , si l'on sait obtenir Y . Tout le problème est donc d'intégrer une équation différentielle (7), linéaire et du troisième ordre, où n'entre aucun paramètre.

L'hypothèse $\lambda = 0$ n'apporte aucune complication : Y est alors donnée par une équation du second ordre

$$Y'' + \mu Y' + \nu Y = 0$$

et z par une quadrature; au contraire, la condition

$$p_{0,1} = 0$$

donne lieu à une exception essentielle; mais, comme elle ne diffère pas de celle qui sera signalée aussi dans le cas général, je crois inutile de m'y arrêter en ce moment.

Si l'identité (3) n'est pas vérifiée, l'équation

$$p'(z) = 0$$

peut néanmoins être intégrable par la méthode de Laplace : il faut alors la transformer, comme l'on sait le faire, jusqu'à ce qu'elle se décompose et fournisse une relation semblable à (4); chacune de ces transformations change visiblement le système (1) en un autre de même espèce, et l'on parvient à un dernier système, auquel s'appliquent les considérations précédentes. Mais les inconnues, qui se sont succédé à la place de z , se déduisent toutes les unes des autres par des opérations simples; l'expression même de z se conclut donc en définitive des intégrales d'une équation différentielle, ayant précisément la forme (7), ce que l'on s'était proposé.

J'admets maintenant que l'équation

$$p'(z) = 0$$

ne s'intègre point par la méthode de Laplace. Il existe des combinaisons de

$$p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

qui jouissent, au contraire, de cette propriété et se décomposent sans être transformées.

L'une d'elles, en effet,

$$(2^*) \quad q_{0,1} p''(z) + q_{1,0} p'(z) = 0,$$

est obtenue, si l'on sait déterminer les trois quantités

$$q_{0,1}, \quad q_{1,0} \quad \text{et} \quad q_0,$$

de manière à vérifier les relations (6, § II), que je rappelle :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial x} - p''_{0,1} \right) q_{0,1} - p'_{0,1} q_{1,0} + q_0 = 0, \\ \frac{\partial q_{1,0}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial x} - p'_{1,0} \right) q_{1,0} - p''_{1,0} q_{0,1} = 0, \\ \frac{\partial q_0}{\partial y} + q_0 \frac{\partial \log p_{0,1}}{\partial x} - p''_0 q_{0,1} - p'_0 q_{1,0} = 0. \end{cases}$$

Étant donnée de cet ensemble une solution, *qui ne soit pas une intégrale du système adjoint à (1)*, l'équation (2*), traitée comme (2), est remplacée par une autre,

$$(9) \quad q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(0,1)} + \dots = \frac{Y}{p_{0,1}},$$

d'ordre inférieur. Elle fournit des relations semblables à (6) et (7) et desquelles résultent les mêmes conséquences.

J'ai fait exception pour les solutions de (8), qui vérifient le système adjoint à (1); car les fonctions

$$q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(0,1)} + q_0 z,$$

qui leur correspondent, n'étant pas changées par les opérations auxquelles on les soumet, Y est alors une constante dans l'équation (9), et l'analyse précédente devient illusoire; mais, par la relation

$$p_{0,1} (q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(0,1)} + q_0 z) = \text{const.},$$

l'une des trois fonctions $z^{(1,0)}$, $z^{(0,1)}$, z s'élimine des équations qu'il faut

intégrer, et leur étude se trouve réduite à celle d'une équation linéaire du second ordre, dont les coefficients, il est vrai, renferment un paramètre. Après cette explication, je n'ai plus qu'à résumer ainsi les propositions dès à présent établies.

L'intégration demandée se divise en deux recherches consécutives.

Le premier point consiste à trouver une solution de l'ensemble (8), qui ne soit point une intégrale du système adjoint à (1).

Le second, à intégrer une équation différentielle, linéaire et du troisième ordre, où ne figure aucun paramètre.

J'ai peu de chose à changer dans cette analyse pour l'appliquer à un système,

$$(10) \quad p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0,$$

ayant quatre intégrales distinctes :

1° Si $p'(z)$ est telle que l'identité (3) soit satisfaite, les relations (10) équivalent à d'autres plus simples,

$$p'''(z) = 0, \\ z^{(0,1)} + p'_{0,1} z = Y e^{-\int p'_{1,0} dx},$$

qui permettent d'isoler l'inconnue z : elle est donnée, cela est clair, par une expression où entre Y avec ses dérivées des trois premiers ordres, Y elle-même par une équation linéaire du quatrième ordre. Celle-ci ne pouvant renfermer x , on a résolu le problème que j'avais en vue.

2° Je suppose que, pour la résolution générale de

$$(11) \quad p'(z) = 0,$$

quelques transformations soient exigées. Puisque l'on peut (§ II) substituer au système (10) trois équations,

$$(12) \quad p(z) = \alpha p, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = -\alpha p''_{2,0} p,$$

contenant une constante arbitraire α , toute transformation de ce système peut être regardée comme effectuée sur ces dernières. Or elles repro-

duisent alors un groupe de même espèce, et dont il résulte, par l'élimination de α , un autre système semblable à (10). Mais rien n'oblige à faire usage des équations (12), dont j'ai parlé seulement pour rendre ma démonstration plus claire et, chacune des opérations faites sur (11), pour en trouver l'intégrale première, ayant conservé à l'ensemble (17) ses propriétés essentielles et sa forme, il est nécessaire qu'on revienne en définitive au cas précédent, ce qui termine toutes les recherches.

3° Sans hypothèse particulière sur les équations (10), on sait qu'elles satisfont aux identités (9, § I), dont l'une s'écrit de cette manière

$$(13) \quad \frac{\partial p'(z)}{\partial y} + (p_{1,0} - p'_{0,1})p'(z) + p_{0,1}p'''(z) = \frac{\partial p(z)}{\partial x} + (p'_{1,0} + p_{0,1}p''_{2,0})p(z).$$

Je considère la combinaison

$$(14) \quad \frac{\partial p'(z)}{\partial y} + (p_{1,0} - p'_{0,1})p'(z) + p_{0,1}p'''(z) = 0,$$

qui serait entièrement connue si l'on avait une intégrale du système

$$(15) \quad P^{(1)}(z) = 0, \quad P^{(m)}(z) = 0,$$

adjoint à (10), et j'observe que des combinaisons analogues s'obtiennent, indépendantes des équations (15), d'après la seule condition (13). Il est visible, en effet, qu'une solution des équations suivantes

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = p'_{1,0}p + p''_{2,0}(p_{0,1}p), \\ \frac{\partial(p_{0,1}p)}{\partial x} = \left(\frac{\partial p'_{0,1}}{\partial y} - p'^2_{0,1} \right)p + p''_{0,1}(p_{0,1}p) + p'_{0,1}(p_{1,0}p) - (p_0p), \\ \frac{\partial(p_{1,0}p)}{\partial x} = \left(\frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} - p'_{0,1}p'_{1,0} + p'_0 \right)p + p''_{1,0}(p_{0,1}p) + p'_{1,0}(p_{0,1}p), \\ \frac{\partial(p_0p)}{\partial x} = \left(\frac{\partial p'_0}{\partial y} - p'_{0,1}p'_0 \right)p + p''_0(p_{0,1}p) + p'_0(p_{1,0}p), \end{array} \right.$$

suffit pour cet objet.

Celles-ci, d'ailleurs, ne contiennent les inconnues

$$p, \quad p_{0,1}p, \quad p_{1,0}p, \quad p_0p$$

et leurs dérivées qu'au premier degré, la variable y que comme un paramètre.

Parmi leurs solutions, si j'en choisis une, telle que $\frac{1}{p_{2,0}''p}$ ne vérifie pas les deux relations (15), je puis associer au système (10) une équation nouvelle

$$z^{(0,2)} + p_{0,1} z^{(1,0)} + p_{1,0} z^{(0,1)} + p_0 z = Y e^{-\int (p_{1,0}' + p_{0,1} p_{2,0}'') dx},$$

où figure une arbitraire Y , indépendante de x ; de là résulte une expression qui représente z , quand cette fonction Y , employée pour la composer, satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, facile à former.

Que l'on prenne, au contraire, une intégrale du système (15) : l'identité correspondante

$$\frac{\partial p'(z)}{\partial y} + (p_{1,0} - p_{0,1}') p'(z) + p_{0,1} p'''(z) = \frac{\partial p(z)}{\partial x} + (p_{1,0}' + p_{0,1} p_{2,0}'') p(z)$$

ne peut fournir une valeur explicite de z , car la quantité

$$z^{(0,2)} + p_{0,1} z^{(1,0)} + p_{1,0} z^{(0,1)} + p_0 z$$

se reproduit toujours par les opérations qu'on doit exécuter. Voici donc à quoi se ramène en définitive la recherche des quatre solutions communes aux équations

$$p'(z) = 0, \quad p'''(z) = 0 :$$

1° Trouver une *seule* solution de l'ensemble (16), qui ne soit point une intégrale du système

$$P^{(1)}(z) = 0, \quad P^{(III)}(z) = 0,$$

adjoint au proposé;

2° Intégrer une équation différentielle, du quatrième ordre et linéaire, dont les coefficients ne contiennent aucun paramètre.

CHAPITRE II.

Équations différentielles dont l'intégrale exprime, entre des constantes arbitraires, une relation linéaire dont les coefficients renferment les variables. — Caractères auxquels on reconnaît les équations de cette espèce. — Leur forme explicite dans deux cas très étendus. — Procédés d'intégration.

IV.

Je considère les équations du second ordre, dont l'intégrale peut être ainsi représentée

$$(1) \quad \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0,$$

après avoir désigné par $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ des constantes arbitraires, par z_1, z_2, \dots certaines fonctions de x et de y . A chacune de ces équations différentielles correspond un système linéaire aux dérivées partielles,

$$(2) \quad p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

ayant ses solutions données par le premier membre de (1), lorsqu'on y laisse x et y indépendantes. Si le système (2) est connu, l'équation différentielle correspondante en résulte sans aucune peine; on déduit en effet, de $z = 0$, deux relations

$$(3) \quad \begin{cases} z^{(1,0)} + z^{(0,1)} y' = 0, \\ z^{(2,0)} + 2z^{(1,1)} y' + z^{(0,2)} y'^2 + z^{(0,1)} y'' = 0, \end{cases}$$

qui, vérifiées avec le système (2), exigent que l'on ait

$$(4) \quad y'' + p_{0,1} y'^3 + (2p'_{0,1} - p_{1,0}) y'^2 + (p''_{0,1} - 2p'_{1,0}) y' - p''_{1,0} = 0;$$

c'est l'équation cherchée. J'y pose

$$(5) \quad p_{0,1} = a_1, \quad 2p'_{0,1} - p_{1,0} = 3a_2, \quad p''_{0,1} - 2p'_{1,0} = 3a_3, \quad -p''_{1,0} = a_4,$$

de sorte qu'elle devienne

$$(6) \quad y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0.$$

Quand l'équation (6) est donnée, une infinité de systèmes semblables à (2) lui correspondent et s'obtiennent comme on va le voir. A cause de (5), j'aurai d'abord

$$(7) \quad \begin{cases} p_{1,0} = 2p'_{0,1} - 3a_2, \\ p''_{0,1} = 3a_3 + 2p'_{1,0}, \end{cases}$$

puis j'ai recours aux identités (3, § I), dont la première a pour conséquences ces conditions

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_{0,1}}{\partial x} + p_0 + p_{0,1}(p'_{1,0} - p''_{0,1}) + p'_{0,1}(p'_{0,1} - p_{1,0}) - \frac{\partial p'_{0,1}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p'_0 - p'_{0,1}p'_{1,0} + p_{0,1}p''_{1,0} - \frac{\partial p_{1,0}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} - p_{0,1}p''_0 + (p'_{0,1} - p_{1,0})p'_0 + p'_{1,0}p_0 - \frac{\partial p'_0}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

et la seconde, les suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial p''_{0,1}}{\partial y} - p_{0,1}p'_{1,0} + p'_{0,1}p'_{1,0} - p'_0 - \frac{\partial p'_{0,1}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial y} + p''_0 + p'_{1,0}(p'_{1,0} - p''_{0,1}) + p''_{1,0}(p'_{0,1} - p_{1,0}) - \frac{\partial p'_{1,0}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p''_0}{\partial y} + p'_{0,1}p''_0 + (p'_{1,0} - p''_{0,1})p'_0 - p''_{1,0}p_0 - \frac{\partial p'_0}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Leur ensemble exprime, on le sait, qu'il y a trois solutions communes aux équations (2), c'est-à-dire que l'équation différentielle proposée,

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

a son intégrale de forme (1). Or on déduit de (8) et (9)

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial y}(p'_{1,0} + p''_{0,1}) = \frac{\partial}{\partial x}(p_{1,0} + p'_{0,1});$$

il existe donc une fonction φ , déterminée par les formules

$$(11) \quad p'_{1,0} + p''_{0,1} = 3 \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}, \quad p_{1,0} + p'_{0,1} = 3 \frac{\partial \log \varphi}{\partial y};$$

cette fonction d'ailleurs est arbitraire, car elle est proportionnelle à un facteur par lequel il est permis de multiplier le premier membre de (1), par suite aussi les intégrales du système (2) qu'on lui fait correspondre. Je prendrai $\varphi = \text{const.}$ ou, ce qui est la même chose,

$$(12) \quad p'_{1,0} + p''_{0,1} = 0, \quad p_{1,0} + p'_{0,1} = 0;$$

j'en puis déduire, en vertu de (7),

$$(13) \quad p'_{0,1} = a_2, \quad p_{1,0} = -a_2, \quad p'_{1,0} = -a_3, \quad p''_{0,1} = a_3,$$

et de ces expressions, portées dans les identités (8) et (9),

$$(14) \quad \begin{cases} p_0 = \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2(a_1 a_3 - a_2^2), \\ p'_0 = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 - a_2 a_3, \\ p''_0 = \frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2(a_2 a_4 - a_3^2). \end{cases}$$

Cela étant, un calcul simple indique les conditions auxquelles doit satisfaire l'équation (6) pour appartenir à la catégorie dont j'ai parlé : ce sont, entre les coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, deux équations qu'on peut représenter ainsi

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_3 \left(2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) - a_4 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_2 \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) + a_1 \left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right) = 0, \end{cases}$$

et qui, d'après leur signification même, doivent constituer un groupe

invariant par toutes les transformations de ce genre

$$(16) \quad x = f_1(\xi, \tau), \quad y = f_2(\xi, \tau),$$

appliquées à l'équation (6). De là, je conclus cette proposition :

Étant donnée une équation différentielle,

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

dont les coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 peuvent renfermer à la fois la variable et l'inconnue, on reconnaît que son intégrale exprime une relation linéaire entre des constantes arbitraires, s'il est satisfait aux identités (15). En ce cas, l'intégrale cherchée s'obtient en égalant à zéro la solution générale d'un système d'équations linéaires, aux dérivées partielles du second ordre,

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} z^{(0,2)} + a_1 z^{(1,0)} - a_2 z^{(0,1)} + z \left[\frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2(a_1 a_3 - a_2^2) \right] = 0, \\ z^{(1,1)} + a_2 z^{(1,0)} - a_3 z^{(0,1)} + z \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 - a_2 a_3 \right] = 0, \\ z^{(2,0)} + a_3 z^{(1,0)} - a_4 z^{(0,1)} + z \left[\frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2(a_2 a_4 - a_3^2) \right] = 0. \end{array} \right.$$

Mais tout système de cette espèce a son adjoint,

$$(18) \quad P(z) = 0, \quad P'(z) = 0, \quad P''(z) = 0,$$

facile à construire d'après les formules (19), (14) et (10) du § II, et correspondant à une équation différentielle semblable à (6),

$$(19) \quad y'' + A_1 y'^3 + 3A_2 y'^2 + 3A_3 y' + A_4 = 0,$$

qu'on en déduit par les relations (5).

Voici les expressions ainsi trouvées pour les coefficients A_1, A_2, \dots, A_4 :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_1 = -a_1, & A_2 = -a_2 + \frac{1}{3} \frac{\partial \log a_1}{\partial y}, \\ A_3 = -a_3 + \frac{2}{3} \frac{\partial \log a_1}{\partial x}, & A_4 = -\frac{1}{a_1} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right). \end{array} \right.$$

Sans aucune peine, on vérifie que ces relations peuvent être inversées, c'est-à-dire que l'on a aussi

$$(21) \quad \begin{cases} a_1 = -A_1, & a_2 = -A_2 + \frac{1}{3} \frac{\partial \log A_1}{\partial y}, \\ a_3 = -A_3 + \frac{2}{3} \frac{\partial \log A_1}{\partial x}, & a_4 = -\frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial A_2}{\partial y} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + A_1 A_4 \right), \end{cases}$$

comme on le devait prévoir.

Les identités (15) ayant lieu, je dirai que les équations (19) et (6) sont *adjointes* l'une à l'autre; leur liaison est telle, on le voit, que si l'intégrale de l'une est calculée sous la forme (1), celle de l'autre est aussi connue, car, ayant intégré l'un des deux systèmes adjoints d'équations aux dérivées partielles, auxquelles correspond l'ensemble (19), (6), le second système a, de ce fait, ses solutions en évidence (§ II).

J'ajoute encore, au sujet des équations adjointes, une remarque à laquelle j'attribue quelque importance; je reprends à cet effet les équations (6) et (7), § II, et, après en avoir éliminé σ et σ' , j'obtiens simplement ce qui suit :

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right) + (p''_{0,1} - p'_{1,0}) \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} + p'_{0,1} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right)^2 - \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \frac{q_0}{q_{0,1}} - p''_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right) + (p'_{0,1} - p_{1,0}) \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} + p_{0,1} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right)^2 + \frac{q_0}{q_{0,1}} - p'_{1,0} = 0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute à la première de ces relations le produit de la seconde par $\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}}$, le coefficient de q_0 s'évanouit, de sorte qu'on trouve enfin

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right) + \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right) + p_{0,1} \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right)^3 \\ + (2p'_{0,1} - p_{1,0}) \left(\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} \right)^2 + (p''_{0,1} - 2p'_{1,0}) \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} - p''_{1,0} = 0, \end{cases}$$

et il est aisé d'établir que toute fonction qui rend identique cette relation est une des valeurs du rapport

$$\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}};$$

je considère maintenant une intégrale première de l'équation proposée (6), intégrale d'ailleurs particulière qu'on peut représenter ainsi

$$(24) \quad y' = f(x, y).$$

On doit avoir, cela est clair,

$$(25) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} + p_{0,1} f^3 + (2p'_{0,1} - p_{1,0}) f^2 + (p''_{0,1} - 2p'_{1,0}) f - p''_{1,0} = 0,$$

et, par conséquent, la fonction f est solution de l'équation (23). Elle fournit donc une expression qui convient à

$$\frac{q_{1,0}}{q_{0,1}},$$

l'une des équations (22) donne ensuite

$$\frac{q_0}{q_{0,1}},$$

et des identités (6 et 7, § II) on déduit

$$(26) \quad \frac{\partial \log q_{0,1}}{\partial x} = \sigma + p''_{0,1} + p'_{0,1} \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}} - \frac{q_0}{q_{0,1}},$$

$$(27) \quad \frac{\partial \log q_{0,1}}{\partial y} = \sigma' + p'_{0,1} + p_{0,1} \frac{q_{1,0}}{q_{0,1}},$$

d'où $q_{0,1}$. On a donc acquis tous les éléments nécessaires pour composer une intégrale du système (18), par suite aussi de l'équation (19), qui est l'adjointe de la proposée; l'intégration de cette dernière est ainsi ramenée à celle d'une équation linéaire du second ordre, mais renfermant un paramètre. Tel est le parti qu'on peut tirer de la seule intégrale (24), bien que donnée sous une forme quelconque.

V.

Les relations (15) du paragraphe précédent fournissent, dans deux cas très étendus, les expressions entièrement explicites des coefficients α_i ,

a_2, a_3, a_4 , qui y figurent. Le premier cas se présente quand aucun de ces coefficients ne contient l'une des variables, par exemple y ; le second, quand

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 = 0.$$

1° Les fonctions a_1, a_2, \dots, a_4 étant supposées ne dépendre que de x et satisfaire aux équations (15, § IV),

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_3 \left(2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) - a_4 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_2 \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) + a_1 \left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right), \end{cases}$$

on observe que l'une de celles-ci a pour intégrale évidente

$$(2) \quad \frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 + 3a_2^2 = 3c,$$

où c désigne une constante arbitraire.

Je prends à volonté a_2 et la fonction α ainsi définie,

$$(3) \quad \frac{\partial a_2}{\partial x} - a_1 a_4 = \alpha :$$

la première équation (1) s'écrit alors

$$(4) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 3a_2 \alpha - 3a_4 (c - a_2^2) = 0$$

et, multipliée par a_1 , se change en celle-ci :

$$(5) \quad a_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + 3a_2^2 - 3c \right) + 3(a_2^2 - c) \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \alpha \right) = 0,$$

grâce aux relations (2) et (3). Or l'équation (5) n'est autre chose que

$$\frac{d}{dx}(a_1\alpha - 3ca_2 + a_2^3) = 0,$$

d'où je conclus

$$(6) \quad a_1\alpha - 3ca_2 + a_2^3 - c_1 = 0,$$

en introduisant une nouvelle constante c_1 . De la formule (6) a_1 résulte, car a_2 et α sont des données, puis la formule (3) fait connaître a_4 , la formule (2) a_3 et le tout en termes finis.

2° Les relations (1) étant satisfaites, on suppose

$$(7) \quad \frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 = 0.$$

Je calculerai d'abord les coefficients A_1, A_2, \dots, A_4 de l'équation (19), § IV; ils vérifient évidemment les deux identités

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + 3 A_2 A_4 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} + A_1 A_4 \right) \\ \quad - 3 A_3 \left(2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} + A_1 A_4 \right) - A_4 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - 3 A_1 A_3 \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - 3 A_1 A_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + A_1 A_4 \right) \\ \quad - 3 A_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + A_1 A_4 \right) + A_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + 3 A_2 A_4 \right) = 0, \end{array} \right.$$

dont la signification est connue. De plus, l'équation (7) équivaut à la suivante :

$$A_4 = 0.$$

Je choisis à volonté une fonction α et j'établis la relation

$$(9) \quad 2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

à cause de la première équation (8), on en déduit

$$(10) \quad 3 A_3 + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial x} = 0$$

et les équations (9) et (10) ont pour conséquence

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial x \partial y} = 0,$$

d'où je puis conclure

$$(11) \quad A_2 + \alpha + \frac{2}{3} \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} = 0.$$

J'ai donc

$$(12) \quad \frac{\partial A_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right];$$

la deuxième équation (8) s'écrit alors

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x} - 3 A_1 A_3 \right] \\ & + \left[3\alpha + 2 \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Le second terme n'est autre que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right]^2 - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right]$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right]^2 - \alpha^2 - \alpha \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right\} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y},$$

de sorte que l'équation (13) se réduit à ceci :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x} - 3 A_1 A_3 \right. \\ & \left. + \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right]^2 - \alpha^2 - \alpha \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

J'ai donc, en intégrant et désignant par Y_0 une fonction de y seulement,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_0 &= \frac{\partial^2 \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x} - 3 A_1 A_3 \\ &+ \left[2\alpha + \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y} \right]^2 - \alpha^2 - \alpha \frac{\partial \log \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\partial y}; \end{aligned} \right.$$

je multiplie par $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ les deux membres de cette équation; à cause de la relation (10) et de l'identité évidente

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \log}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \left[\frac{\partial \log}{\partial y} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \right]^2 \right\} = \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x \partial y^2},$$

j'obtiens

$$Y_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + 3 \alpha^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 3 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x \partial y^2}$$

et, si j'intègre une seconde fois, Y_1 étant une nouvelle fonction arbitraire de y , je puis écrire

$$(16) \quad Y_1 - Y_0 \alpha + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + 3 \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha^3 + A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0.$$

Toutefois l'hypothèse

$$(17) \quad 2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

met en défaut l'analyse précédente; voici comment on doit alors procéder :

L'équation (17) signifie que $2 A_3$ et A_2 sont les dérivées partielles d'une même fonction; elles peuvent donc s'exprimer au moyen d'une nouvelle inconnue α , de cette manière

$$(18) \quad \begin{cases} A_3 = -\frac{1}{3} \frac{\partial \log}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right), \\ A_2 = -\frac{2}{3} \frac{\partial \log}{\partial y} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Par la relation (17), l'une des identités (8) est satisfaite d'elle-même; l'autre se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} - 3 A_1 A_3 + \frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)} \right] = 0,$$

et il en résulte

$$(19) \quad \frac{\partial A_1}{\partial x} - 3A_1 A_3 + \frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)} = Y_0,$$

avec une fonction arbitraire Y_0 de la seule variable y ; une seconde intégration, fort évidente, donne la formule définitive

$$(20) \quad A_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - Y_0 x - Y_1 = 0,$$

en introduisant une nouvelle arbitraire Y_1 , indépendante de x .

Dans chaque cas, je sais ainsi exprimer toutes les inconnues

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots, \quad A_4,$$

à l'aide d'une certaine fonction α , dont on dispose à volonté, de Y_0 et de Y_1 , et cela sans quadrature.

Les formules (21, § IV) donnent ensuite les coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 , qu'il s'agissait de déterminer.

De plus, l'équation

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0$$

ne subissant pas de modification essentielle, lorsqu'on y prend x pour la fonction cherchée, y pour la variable, mais devenant

$$x'' - a_1 x'^3 - 3a_2 x'^2 - 3a_3 x' - a_4 = 0,$$

des considérations toutes semblables aux précédentes s'appliquent aux cas :

1° Où a_1, a_2, \dots, a_4 ne renferment pas x ;

2° Où l'on doit avoir

$$2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 = 0,$$

ou bien

$$A_1 = 0.$$

VI.

D'après les résultats obtenus au § IV, une équation différentielle

$$(1) \quad y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

dont les coefficients vérifient les identités

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_3 \left(2 \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) - a_4 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_2 \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) + a_1 \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right) = 0, \end{cases}$$

s'intègre en égalant à zéro la solution générale d'un système linéaire aux dérivées partielles

$$(3) \quad \begin{cases} z^{(0,2)} + a_1 z^{(1,0)} - a_2 z^{(0,1)} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2(a_1 a_3 - a_2^2) \right] z = 0, \\ z^{(1,1)} + a_2 z^{(1,0)} - a_3 z^{(0,1)} + \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 - a_2 a_3 \right] z = 0, \\ z^{(2,0)} + a_3 z^{(1,0)} - a_4 z^{(0,1)} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2(a_2 a_4 - a_3^2) \right] z = 0, \end{cases}$$

qui a trois intégrales distinctes.

L'étude des systèmes de cette espèce a été faite au Chapitre I, et l'on pourrait, en conséquence, y renvoyer pour tout ce qui touche à l'intégration de l'équation (1); mais il n'est pas inutile d'ajouter quelques remarques à celles que j'ai déjà faites sur ce sujet.

1° D'abord, il faut noter les équations dont les coefficients contiennent une seule des variables et, pour plus de précision, je suppose que ce soit x . En ce cas, selon la méthode indiquée au § III, l'on est conduit à

chercher une solution de ce système

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - p''_{0,1} q_{0,1} - p'_{0,1} q_{1,0} + q_0 = 0, \\ \frac{\partial q_{1,0}}{\partial x} - p''_{1,0} q_{0,1} - p'_{1,0} q_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial q_0}{\partial x} - p''_0 q_{0,1} - p'_0 q_{1,0} = 0; \end{cases}$$

car on peut toujours faire $\sigma = 0$ dans les relations (6, § II); cette solution étant, comme il est clair, indépendante de y , il y a une combinaison linéaire des deux équations aux dérivées partielles

$$p(z) = 0, \quad p'(z) = 0,$$

qui s'intègre par la méthode de Laplace dès la première opération, et ses coefficients ne renferment que x . L'équation semblable à (7, § III), déduite de cette combinaison, doit définir une fonction de y et, par suite, il y figure uniquement des quantités où n'entre pas x ; mais les équations mêmes dont elle résulte ne permettent pas que la variable y s'y puisse introduire; ses coefficients sont donc des constantes absolues, ce qui implique pour z la forme suivante

$$(5) \quad z = K_1 \varphi_1(x) e^{m_1 y} + K_2 \varphi_2(x) e^{m_2 y} + K_3 \varphi_3(x) e^{m_3 y},$$

avec trois constantes arbitraires K ; m_1, m_2, \dots désignent des valeurs données.

2° J'ai déjà fait une étude particulière des systèmes pour lesquels a lieu l'identité

$$\frac{\partial p'_{0,1}}{\partial x} + p'_{0,1} p'_{1,0} - p'_0 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{2 \partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 = 0.$$

Je reviens sur cette question en vue de présenter des explications plus détaillées et je conserve à cet effet les notations précédentes. L'équa-

tion (7, § III) s'écrit ainsi

$$(7) \quad Y''' + 3P_1 Y'' + 3P_2 Y' + P_3 = 0,$$

P_1, P_2, P_3 étant des fonctions indépendantes de x . Dans l'adjointe de la proposée

$$y'' + A_1 y'^3 + 3A_2 y'^2 + 3A_3 y' + A_4 = 0,$$

le coefficient A_4 est nul en vertu de (6), et, d'après une relation établie au § V,

$$\frac{2\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}.$$

Comme d'ailleurs un calcul facile fait connaître successivement les formules

$$(8) \quad \lambda = A_1 \left(2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) = A_1 \frac{\partial x}{\partial x};$$

$$(9) \quad \varpi = e^{\int a_1 dx} = A_1^{\frac{2}{3}} e^{-\int A_1 dx} = A_1^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)^{\frac{1}{3}},$$

et, à cause de

$$(9') \quad \mu = \frac{2\partial \log \varpi}{\partial y} - \left(a_2 + \frac{\partial \log a_1}{\partial y} \right),$$

l'expression de P_1 que je transcris,

$$(10) \quad P_1 = \frac{1}{3} \left[\mu + a_2 + \frac{\partial \log \left(\frac{\varpi}{\lambda} \right)}{\partial y} \right] = \frac{\partial \log}{\partial y} \left[\frac{\varpi}{(a_1 \lambda)^{\frac{1}{3}}} \right],$$

ce coefficient est toujours nul.

Mais on a posé

$$(11) \quad \begin{cases} 3P_2 = \nu + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu(3P_1 - \mu), \\ P_3 = \frac{\partial \nu}{\partial y} - \lambda + \nu(3P_1 - \mu); \end{cases}$$

par l'élimination de ν et grâce à l'égalité maintenant connue

$$P_1 = 0,$$

j'en puis déduire

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - 3\mu \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu^3 + 3P_2 \mu + (\lambda + P_3 - 3P'_2) = 0.$$

Or on a déjà (9')

$$\mu = A_2 + \frac{2}{3} \frac{\partial \log \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)}{\partial y},$$

c'est-à-dire (§ V),

$$(13) \quad \mu = -\alpha.$$

Substituant cette expression dans l'équation (12), on trouve que l'identité (16) du paragraphe précédent exige à la fois les deux conditions

$$(14) \quad 3P_2 = -Y_0, \quad P_3 = Y_1 - Y'_0.$$

La première équation du groupe (11) donne ensuite

$$(15) \quad \nu = \frac{\partial x}{\partial y} + \alpha^2 - Y_0,$$

d'où cette conclusion :

Quand les identités (2) sont satisfaites et, en même temps, la suivante

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_3 = 0,$$

pour intégrer l'équation proposée, on forme les coefficients de son adjointe

$$(16) \quad A_1 = -a_1, \quad A_2 = -a_2 + \frac{1}{3} \frac{\partial \log a_1}{\partial y}, \quad A_3 = -a_3 + \frac{2}{3} \frac{\partial \log a_1}{\partial x},$$

puis α se détermine par l'équation

$$(17) \quad \alpha = - \left[A_2 + \frac{2}{3} \frac{\partial \log \left(2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right)}{\partial y} \right].$$

Cela fait, je prends

$$(18) \quad Y_0 = \frac{\partial A_1}{\partial x} - 3A_1 A_3 + \frac{\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x \partial y^2}}{\frac{\partial x}{\partial y}} + 3 \left[\frac{\partial x}{\partial y} + \alpha^2 + \alpha \frac{\partial \log \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)}{\partial x} \right]$$

et je me sers, pour obtenir Y_1 , de l'équation (16, § V); ces opérations terminées, le problème est réduit à l'intégration d'une équation linéaire

$$(19) \quad Y''' - Y_0 Y' + (Y_1 - Y_0') Y = 0;$$

la solution générale du système (3) est donnée par cette formule

$$(20) \quad z = A_1^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-\frac{2}{3}} \left[Y'' - \alpha Y' + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha^2 - Y_0 \right) Y \right],$$

et

$$z = 0$$

exprime l'intégrale de l'équation proposée (1).

Il y a exception à ces règles, si

$$(21) \quad 2 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} = 0;$$

en ce cas, il convient de définir α et Y_0 par les relations (18) et (19) du paragraphe précédent. Par une analyse entièrement semblable à celle qui vient d'être présentée, on trouve alors

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = Y_0.$$

Voici donc l'équation linéaire du second ordre à laquelle est ramené tout le problème :

$$(22) \quad Y'' + Y_0 Y = 0.$$

En égalant à zéro l'expression de z qui lui est corrélatrice,

$$(23) \quad z = A_1^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-\frac{2}{3}} \left[\int \left(Y' \frac{\partial z}{\partial x} - Y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) dx + \left(A_1 \frac{\partial z}{\partial x} Y \right) dy \right],$$

on a l'intégrale générale de l'équation proposée (1).

CHAPITRE III.

Équations du premier ordre qui expriment $\frac{dy}{dx}$ par un polynôme du troisième degré en y . — Cas particuliers liés aux recherches précédentes. — Examen d'un cas plus général qui s'y ramène. — Équations du second ordre immédiatement intégrables. — Leur forme générale. — Applications.

VII.

L'équation

$$(1) \quad y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0$$

s'abaisse au premier ordre, quand les fonctions a_1, a_2, \dots, a_4 ne renferment point x ou y , car y manquant, par exemple, l'équation (1) ne diffère pas de celle-ci

$$(2) \quad \frac{dy'}{dx} + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

où l'inconnue est y' .

Les coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 sont supposés satisfaire aux identités (2, § VI), c'est-à-dire, dans le cas actuel, aux deux suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{da_1}{dx} + 3(a_2^2 - a_1 a_3) \right] = 0, \\ \frac{d}{dx} \left(a_1 a_4 - \frac{da_2}{dx} \right) - 3a_3 \frac{da_2}{dx} + a_4 \frac{da_1}{dx} = 0. \end{cases}$$

Ces relations définissent, parmi les équations de forme (2), un groupe particulier digne d'intérêt. Les équations qui en font partie jouissent de cette propriété caractéristique : l'inconnue étant y' , entre x ,

$$\int y' dx$$

et deux constantes arbitraires existe une équation, linéaire par rapport à ces constantes.

Je vais examiner les différentes hypothèses qu'on peut faire quand les conditions (3) sont remplies et, afin d'abrégier, je poserai en général

$$\frac{da_i}{dx} = a'_i.$$

1° Soit vérifiée cette identité

$$(4) \quad a_1 a_4 - 2a'_2 = 0,$$

d'après laquelle le système aux dérivées partielles

$$(5) \quad \begin{cases} z^{(0,2)} + a_1 z^{(1,0)} - a_2 z^{(0,1)} + [2(a_1 a_3 - a_2^2) - a'_1] z = 0, \\ z^{(1,1)} + a_2 z^{(1,0)} - a_3 z^{(0,1)} + [a_1 a_4 - a_2 a_3 - a'_2] z = 0, \\ z^{(2,0)} + a_3 z^{(1,0)} - a_4 z^{(0,1)} + [2(a_2 a_4 - a_3^2) - a'_3] z = 0, \end{cases}$$

correspondant à (1), comme je l'ai montré, contient une équation susceptible d'intégration immédiate.

Les théories développées au paragraphe précédent sont ici toutes deux applicables. La deuxième équation (5) ne diffère pas de celle-ci

$$z^{(0,1)} + a_2 z = Y e^{\int a_1 dx},$$

où Y ne dépend que de y ; on en déduit, en général, une expression explicite de z

$$(6) \quad z = \frac{e^{\int a_1 dx}}{a_1(a'_1 + 2a_2 a_3)} [Y'' - a_2 Y' + Y(a_2^2 - a'_1 + 3a_1 a_3 - 3a_2^2)],$$

et pour Y une équation différentielle

$$(7) \quad \begin{cases} Y''' + [3(a_1 a_3 - a_2^2) - a'_1] Y' \\ + [a_2(2a_1 a_3 - 2a_2^2 - a'_1) + a_1(a'_2 + a_2 a_3 - a_1 a_4)] Y = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients doivent être constants. Les relations

$$(8) \quad \begin{cases} a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3) = 3c, \\ a_1 a'_2 - a_2 a'_1 + 2a_2(a_1 a_3 - a_2^2) + a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) = c_1, \end{cases}$$

où c et c_1 représentent des constantes quelconques, équivalent bien en

effet au système (3). Par leur moyen, l'équation (7) est devenue

$$(9) \quad Y''' - 3c Y' - c_1 Y = 0;$$

son intégrale générale, qui s'exprime ainsi,

$$(10) \quad Y = K_1 e^{m_1 y} + K_2 e^{m_2 y} + K_3 e^{m_3 y},$$

contient les racines m_1, m_2, m_3 d'une équation numérique

$$(11) \quad m^3 - 3cm + c_1 = 0,$$

et introduit trois arbitraires K. L'équation (1) s'intègre en posant

$$z = 0,$$

c'est-à-dire, en égard aux relations (8),

$$Y'' - a_2 Y' + (a_2^2 - 3c) Y = 0,$$

ou bien encore, grâce à la formule (10),

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 (m_1^2 - a_2 m_1 + a_2^2 - 3c) e^{m_1 y} + K_2 (m_2^2 - a_2 m_2 + a_2^2 - 3c) e^{m_2 y} \\ \quad + K_3 (m_3^2 - a_2 m_3 + a_2^2 - 3c) e^{m_3 y} = 0. \end{array} \right.$$

Comme il faut tirer de là l'expression de y' , il semble que cette fonction contienne une constante superflue; mais cette apparente singularité s'évanouit d'elle-même. Pour le montrer, je différentie (12), en adoptant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} m_1^2 - a_2 m_1 + (a_2^2 - 3c) &= \psi_1(x), \\ m_2^2 - a_2 m_2 + (a_2^2 - 3c) &= \psi_2(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 [m_1 y' \psi_1(x) + \psi_1'(x)] e^{m_1 y} + K_2 [m_2 y' \psi_2(x) + \psi_2'(x)] e^{m_2 y} \\ \quad + K_3 [m_3 y' \psi_3(x) + \psi_3'(x)] e^{m_3 y} = 0; \end{array} \right.$$

des équations (12) et (13) il résulte

$$\begin{aligned} \frac{K_1 e^{m_1 y}}{(m_3 - m_2) \gamma' \psi_2 \psi_3 + \psi_2 \psi_3' - \psi_3 \psi_2'} &= \frac{K_2 e^{m_2 y}}{(m_1 - m_3) \gamma' \psi_3 \psi_1 + \psi_3 \psi_1' - \psi_1 \psi_3'} \\ &= \frac{K_3 e^{m_3 y}}{(m_2 - m_1) \gamma' \psi_1 \psi_2 + \psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1'}. \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} (m_3 - m_2) \gamma' \psi_2 \psi_3 + \psi_2 \psi_3' - \psi_3 \psi_2' &= \omega_1, \\ (m_1 - m_3) \gamma' \psi_3 \psi_1 + \psi_3 \psi_1' - \psi_1 \psi_3' &= \omega_2, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire, après une réduction facile,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= (m_3 - m_2)(a_2 + m_1)[(a_1^2 - 3ca_2 + c_1)\gamma' + (a_2 + m_1)a_2], \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

et, sachant que

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

j'obtiens enfin

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{m_1 y} &= \frac{(K_1 K_2 K_3)^{\frac{1}{3}} \omega_1}{K_1 (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{\frac{1}{3}}}, \\ e^{m_2 y} &= \frac{(K_1 K_2 K_3)^{\frac{1}{3}} \omega_2}{K_2 (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{\frac{1}{3}}}, \\ e^{m_3 y} &= \frac{(K_1 K_2 K_3)^{\frac{1}{3}} \omega_3}{K_3 (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{\frac{1}{3}}}, \end{aligned} \right.$$

d'où cette équation symétrique

$$(16) \quad \omega_1^{(m_1 - m_2)} \omega_2^{(m_2 - m_3)} \omega_3^{(m_3 - m_1)} = h.$$

J'ai désigné par h une constante arbitraire, liée à K_1 , K_2 , K_3 par une relation évidente, et l'équation (16) est l'intégrale générale de l'équation (2), calculée, comme on le voit, sans avoir eu à effectuer une seule quadrature.

2° La relation (4) n'étant plus supposée, les identités (3) seules sont satisfaites. D'après un résultat établi au paragraphe précédent, le système (5), corrélatif de l'équation proposée, admet toujours une solution

générale de cette espèce

$$(17) \quad z = K_1 \psi_1(x) e^{m_1 r} + K_2 \psi_2(x) e^{m_2 r} + K_3 \psi_3(x) e^{m_3 r}.$$

Il s'agit uniquement de déterminer les fonctions ψ et les constantes m qui y figurent.

A cet effet, il suffit de substituer l'expression (17) dans la première équation du système (5); on en conclut, pour chacune des trois valeurs de l'indice i , la formule suivante :

$$(18) \quad \frac{\psi'_i}{\psi_i} = \frac{a'_1 + 2(a_2^2 - a_1 a_3) + a_2 m_i - m_i^2}{a_1} = \frac{3c + (a_1 a_3 - a_2^2) + a_2 m_i - m_i^2}{a_1},$$

d'autres identités, fournies par les équations

$$p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

conduisent à des vérifications et à la relation numérique

$$m^3 - 3cm + c_1 = 0,$$

qui continue à être satisfaite par les constantes m .

J'ai donc, dès à présent, réuni les éléments nécessaires pour construire l'intégrale (17); c'était le but de toutes les recherches qui viennent d'être exposées. Par les moyens déjà employés, l'équation

$$K_1 \psi_1(x) e^{m_1 r} + K_2 \psi_2(x) e^{m_2 r} + K_3 \psi_3(x) e^{m_3 r} = 0$$

peut être ramenée à une autre, semblable à (16) et vérifiée par y' .

VIII.

On peut donner à ces résultats une généralité beaucoup plus grande à l'aide d'une transformation simple.

Dans une équation de cette forme,

$$(1) \quad y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0,$$

je fais la substitution

$$(2) \quad y = \eta \varphi(x),$$

me proposant de choisir la fonction φ , de manière que l'équation nouvelle

$$(3) \quad \eta' + \alpha_1 \eta^3 + 3\alpha_2 \eta^2 + 3\alpha_3 \eta + \alpha_4 = 0$$

appartienne à la catégorie étudiée au paragraphe précédent. Je dois alors avoir ces formules

$$(4) \quad \alpha'_1 + 3(\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3) = 3c,$$

$$(5) \quad \frac{d}{dx}(\alpha_1 \alpha_4 - \alpha'_2) - 3\alpha_3 \alpha'_2 + \alpha_4 \alpha'_1 = 0,$$

où j'ai marqué les dérivées par des accents et désigné par c une constante arbitraire. Comme

$$(6) \quad \alpha_1 = a_1 \varphi^2, \quad \alpha_2 = a_2 \varphi, \quad \alpha_3 = a_3 + \frac{1}{3} \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad \alpha_4 = \frac{a_4}{\varphi},$$

je conclus de l'équation (4)

$$(7) \quad a_1 \varphi \varphi' + [a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)] \varphi^3 - 3c = 0,$$

puis de (5)

$$2a_4 \frac{d(a_1 \varphi)}{dx} + a_1 \frac{d(a_4 \varphi)}{dx} - \frac{d^2(a_2 \varphi)}{dx^2} - \left(3a_3 + \frac{\varphi'}{\varphi}\right) \frac{d(a_2 \varphi)}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire, à cause de la relation (7),

$$(8) \quad \begin{cases} 3\varphi \varphi' [a_1(a_1 a_4 - a_2 a_3) + (a_2 a'_1 - a_1 a'_2) + 2a_2(a_2^2 - a_1 a_3)] \\ + \varphi^2 [a_1(2a_4 a'_1 - 3a_3 a'_2 + a_1 a'_4 - a'_2) + a_2 \frac{d}{dx}(a'_1 + 3a_2^2 - 3a_1 a_3)] = 0. \end{cases}$$

Pour abréger, je pose

$$(9) \quad L = a_2 a'_1 - a_1 a'_2 + a_1(a_1 a_4 - a_2 a_3) + 2a_2(a_2^2 - a_1 a_3),$$

de sorte que l'équation (8) peut être écrite

$$(10) \quad 3L\varphi' + L'\varphi = 0.$$

La conséquence est que l'on a

$$(11) \quad \varphi = \frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{K}} L^{-\frac{1}{3}},$$

si K est une constante.

Mais le système (7), (11) exige pour condition

$$(12) \quad a_1 L' + KL^{\frac{5}{3}} - 3[a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]L = 0,$$

à moins, toutefois, que, les relations (7) et (10) n'étant pas distinctes, la constante c s'évanouisse, car alors il faudrait avoir

$$(13) \quad a_1 L' - 3[a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]L = 0,$$

ou bien que l'équation (10) soit identique, ce qui suppose

$$(14) \quad L = 0.$$

Ces deux cas appartiennent aussi à l'ensemble défini par la relation (12).

Ainsi donc, la fonction φ étant choisie d'après la formule (11), quand L et c sont différents de zéro, d'après (7) quand l'une ou l'autre de ces quantités s'évanouit, la transformation (2) ramène l'équation (1) à la forme étudiée au paragraphe précédent. De là cette conclusion :

L'équation différentielle

$$y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0$$

est réductible aux quadratures, si ses coefficients a_1, \dots, a_4 et leurs dérivées a'_1, \dots, a'_4 satisfont à l'identité suivante

$$a_1 L' + KL^{\frac{5}{3}} - 3[a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]L = 0,$$

où par L j'ai représenté cette combinaison

$$L = a_2 a'_1 - a_1 a'_2 + a_1 (a_1 a_4 - a_2 a_3) + 2 a_2 (a_2^2 - a_1 a_3),$$

et par K une constante arbitraire, qui peut être nulle.

D'apparentes exceptions se rencontrent si l'équation numérique (11), (§ VII) a des racines égales ou nulles; leur discussion, équivalente à celle de l'équation (9, § VII), est trop connue pour qu'il y ait lieu de m'y arrêter et je l'omettrai tout entière; mais je veux signaler une transformation que permet la condition

$$L = 0$$

et qui donne, je pense, la vraie signification de cette identité.

λ et μ étant liées à x d'une façon arbitraire, je multiplie l'équation (1) par

$$2\lambda y + \mu,$$

puis j'introduis une fonction nouvelle

$$\eta = \lambda y^2 + \mu y;$$

grâce à l'hypothèse faite (14), la transformée s'écrit

$$(15) \quad \eta' + \eta^2 - \frac{[a'_1 + 2(a_2^2 - 3a_1 a_3)]}{a_1} \eta + 4a_2 a_4 = 0,$$

dès que l'on prend

$$\lambda = 2a_1, \quad \mu = 4a_2.$$

L'équation (15) est du type de Riccati et se ramènerait, comme l'on sait, aux équations linéaires du second ordre. Son existence seule est ce que j'avais en vue d'établir, parce qu'elle exige la relation (14).

Je termine par une remarque qui se rattache à la théorie des invariants différentiels. Cette notion des invariants a été imaginée par Laguerre et par M. Halphen pour l'étude des équations linéaires, et il en a été fait un très grand usage. Elle s'étend sans peine aux équations telles que (1); toutefois, des recherches, bien plus générales que celles dont je rends

compte en ce Mémoire, m'engageraient à modifier un peu le langage dans le cas actuel.

Toutes les transformations ainsi définies

$$(16) \quad \frac{dx_1}{dx} = f(x), \quad y = y_1 \varphi(x)$$

étant appliquées à l'équation suivante

$$y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0,$$

j'appellerai *invariants relatifs* les expressions, composées avec a_1, \dots, a_4 et leurs dérivées, que les substitutions (16) reproduisent, multipliées par une certaine puissance du rapport

$$\frac{\varphi}{f};$$

en ce sens, L et le premier membre de (12) sont des *invariants*.

IX.

Parmi les équations dont l'intégrale est une fonction linéaire des constantes, celles qui sont données ainsi

$$(1) \quad y'' + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' = 0$$

méritent une étude spéciale en raison de leur simplicité. Je vais d'abord indiquer les conditions satisfaites par les coefficients a_2 et a_3 et, comme conséquence, leur forme générale explicite.

Lorsque l'on pose

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{2\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} = G, & a_1 = 0, \\ \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{2\partial a_2}{\partial x} = H, & a_4 = 0, \end{cases}$$

les équations (2, § VI) se changent en ce système

$$(3) \quad 3G + \frac{\partial^2 \log(G^2 H)}{\partial x \partial y} = 0, \quad 3H + \frac{\partial^2 \log(GH^2)}{\partial x \partial y} = 0;$$

il s'agit d'obtenir, en toute généralité, les fonctions G et H qui le rendent identique. Or, en me reportant au § V et reprenant les notations que j'y ai employées, je trouve qu'il faut avoir

$$(4) \quad G = \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + 3\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha^3 - Y_0 \alpha + Y_1 = 0.$$

La substitution

$$\alpha = \frac{\partial \log \gamma}{\partial y}$$

change l'équation (5) en une autre, linéaire et du troisième ordre,

$$(6) \quad \frac{\partial^3 \gamma}{\partial y^3} - Y_0 \frac{\partial \gamma}{\partial y} + Y_1 \gamma = 0.$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ trois intégrales de cette dernière, de sorte que l'on représente α par la formule

$$(7) \quad \alpha = \frac{\partial \log}{\partial y} (X_1 \gamma_1 + X_2 \gamma_2 + X_3 \gamma_3),$$

avec trois quantités X_1, X_2, X_3 , indépendantes de y , c'est-à-dire fonctions arbitraires de x . A cause de la lacune qui existe au second terme de l'équation (6), le déterminant

$$\sum \pm \gamma_i \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial y^2}$$

doit être une constante, et, sous cette condition,

$$G = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} (X_1 \gamma_1 + X_2 \gamma_2 + X_3 \gamma_3);$$

mais l'expression entre parenthèses peut être multipliée par un produit

quelconque, de la forme

$$XY,$$

sans que la valeur de G soit altérée; ce multiplicateur peut être choisi tel que l'équation

$$\sum \pm \gamma, \frac{\partial \gamma_2}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial \gamma^2} = \text{const.}$$

ait lieu, et par suite il est permis d'écrire

$$(8) \quad G = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} (X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3),$$

en regardant

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3$$

comme des fonctions tout à fait arbitraires de y .

Je pose

$$\begin{aligned} X_2 X'_3 - X_3 X'_2 &= \Lambda_1, & X_3 X'_1 - X_1 X'_3 &= \Lambda_2, & \dots, \\ Y_2 Y'_3 - Y_3 Y'_2 &= M_1, & \dots & \dots, & \dots, \end{aligned}$$

et, pour abréger, je désigne par (XY) , (ΛM) , respectivement, les quantités

$$\begin{aligned} X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3, \\ \Lambda_1 M_1 + \Lambda_2 M_2 + \Lambda_3 M_3; \end{aligned}$$

la formule (8) équivaut à celle-ci :

$$(9) \quad G = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} (XY) = \frac{(\Lambda M)}{(XY)^2}.$$

Mais il résulte du système (3)

$$H = 2G + \frac{\partial^2 \log G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} \left[\frac{(\Lambda M)(XY)^2}{(XY)^2} \right] = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} (\Lambda M);$$

je représente par D_x le déterminant $\Sigma \pm X_1 X'_2 X'_3$, par D_y son analogue, $\Sigma \pm Y_1 Y'_2 Y'_3$. L'expression de H se développe de cette manière

$$(11) \quad H = \frac{D_x D_y (XY)}{(\Lambda M)^2},$$

et il est aisé de reconnaître que les relations (9) et (11) sont bien les intégrales du système (3). On en déduit en effet

$$G^2 H = \frac{D_x D_y}{(XY)^3}, \quad GH^2 = \frac{D_x^2 D_y^2}{(\Lambda M)^3};$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log(G^2 H)}{\partial x \partial y} &= -3 \frac{\partial^2 \log(XY)}{\partial x \partial y} = -3G, \\ \frac{\partial^2 \log(GH^2)}{\partial x \partial y} &= -3 \frac{\partial^2 \log(\Lambda M)}{\partial x \partial y} = -3H, \end{aligned}$$

comme l'exigeaient les équations indiquées.

Voici maintenant comment s'intègre l'équation

$$(12) \quad y'' + y'^2 \frac{\partial \log H}{\partial y} - y' \frac{\partial \log G}{\partial x} = 0,$$

qui, d'après les formules (2) et (3), ne diffère pas de (1).

A cet effet, dans les relations (6) et (7), § II, j'annule σ et σ' ; les trois fonctions $q_{0,1}$, $q_{1,0}$, q_0 sont alors telles que l'on ait

$$q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(0,1)} + q_0 z = \text{const.},$$

pour toute intégrale du système

$$p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

correspondant à l'équation différentielle proposée. Les lacunes que présente cette dernière donnent aux relations mentionnées la forme suivante :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial x} - a_3 q_{0,1} - a_2 q_{1,0} + q_0 = 0, \\ \frac{\partial q_{1,0}}{\partial x} + a_3 q_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial q_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} + 2a_3^2 \right) q_{0,1} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_3}{\partial y} + a_2 a_3 \right) q_{1,0} = 0, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_{0,1}}{\partial y} - a_2 q_{0,1} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Or, d'après la première équation (14) et eu égard aux expressions trouvées,

$$3a_2 = \frac{\partial \log H}{\partial y}, \quad 3a_3 = -\frac{\partial \log G}{\partial x},$$

si l'on prend

$$(15) \quad q_{0,1} = H^{\frac{1}{3}} \xi,$$

y ne peut entrer dans ξ . Un calcul très simple en fait conclure, grâce au système (13), cette formule

$$(16) \quad H^{\frac{2}{3}} q_{1,0} + \xi'' + \lambda \xi' + \mu \xi = 0,$$

avec les conditions

$$(17) \quad \lambda = \frac{\partial \log}{\partial x} (H^2 G)^{\frac{1}{3}},$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 \log H}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \log G}{\partial x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{9} \left[\left(\frac{\partial \log H}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \log H}{\partial x} \frac{\partial \log G}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log G}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \log G}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(19) \quad \xi''' + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \mu - \lambda \frac{\partial \log}{\partial x} (H^2 G)^{\frac{1}{3}} \right] \xi' + \xi \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \frac{\partial \log}{\partial x} (H^2 G)^{\frac{1}{3}} \right] = 0.$$

L'équation (19), qui peut s'écrire

$$(19') \quad \xi''' + 3P_2 \xi' + P_3 \xi = 0,$$

renferme la seule variable x ; ses coefficients sont

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} 3P_2 &= \frac{\partial^2 (H^2 G)^{\frac{1}{3}}}{(H^2 G)^{\frac{1}{3}} \partial x^2} + \mu \\ &= \frac{\partial^2 \log (HG)}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial \log G}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \log G}{\partial x} \frac{\partial \log H}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial x} \right)^2 \right], \\ P_3 &= \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \frac{\partial \log}{\partial x} (H^2 G)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \right.$$

de sorte que la fonction θ ainsi définie,

$$\frac{\partial \log \theta}{\partial x} + \lambda = 0,$$

vérifie l'équation linéaire

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 3P_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + (3P_2' - P_3)\theta = 0.$$

Selon (17), voici l'une des expressions qui conviennent à θ :

$$(H^2 G)^{-\frac{1}{3}} = D_x^{-\frac{2}{3}} D_y^{-\frac{2}{3}} (\Lambda M).$$

Mais l'équation (21) ne renfermant que x , c'est qu'elle admet les trois solutions

$$D_x^{-\frac{2}{3}} \Lambda_1, \quad D_x^{-\frac{2}{3}} \Lambda_2, \quad D_x^{-\frac{2}{3}} \Lambda_3;$$

celles-ci obtenues, l'équation (19'), adjointe de (21), serait aussi intégrée, faisant connaître la fonction ξ et, avec elle, $q_{0,1}$, $q_{1,0}$, en vertu de (15) et (16), puis q_0 par la première équation (13).

D'ailleurs, en marquant d'un indice les différentes solutions de l'équation (19) et les expressions $q_{0,1}$, $q_{1,0}$ qui s'y rattachent, il est clair que ceci

$$C_1(q_{0,1}^{(2)} q_{1,0}^{(3)} - q_{0,1}^{(3)} q_{1,0}^{(2)}) + C_2(q_{0,1}^{(3)} q_{1,0}^{(1)} - q_{0,1}^{(1)} q_{1,0}^{(3)}) + C_3(q_{0,1}^{(1)} q_{1,0}^{(2)} - q_{0,1}^{(2)} q_{1,0}^{(1)})$$

est l'expression générale de z , quand C_1 , C_2 , C_3 sont des constantes arbitraires; et, comme elle devient, d'après (15) et (16),

$$z = C_1 [\lambda (\xi_2 \xi_3' - \xi_3 \xi_2') + (\xi_2 \xi_3'' - \xi_3 \xi_2'')] + \dots,$$

ou bien aussi, à cause de (17),

$$z = (H^2 G)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_1 (\xi_2 \xi_3' - \xi_3 \xi_2') + C_2 (\xi_3 \xi_1' - \xi_1 \xi_3') + C_3 (\xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1')}{(H^2 G)^{\frac{1}{3}}} \right],$$

comme, en outre,

$$(\xi_2 \xi_3'' - \xi_3 \xi_2''), \quad \dots$$

vérifient l'équation (21), adjointe de (19), l'intégrale générale de la proposée, (1) ou (12), se trouve représentée par la formule

$$(22) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_x^{-\frac{2}{3}} (C_1 \Lambda_1 + C_2 \Lambda_2 + C_3 \Lambda_3)}{(H^2 G)^{\frac{1}{3}}} \right],$$

équivalente à $z = 0$.

Pour la construire, il faut déterminer H et G par les relations (2), puis, ayant pris $(H^2 G)^{\frac{1}{3}}$ et ses dérivées par rapport à y , toutes solutions évidentes de l'équation (21), en déduire trois quantités de la forme

$$C_1 D_x^{-\frac{2}{3}} \Lambda_1 + C_2 D_x^{-\frac{2}{3}} \Lambda_2 + C_3 D_x^{-\frac{2}{3}} \Lambda_3,$$

en donnant à y une valeur constante quelconque. Cela fait, on a réuni tous les éléments nécessaires pour calculer l'intégrale (22).

X.

Afin de présenter en détail quelques-uns des calculs indiqués jusqu'ici, je vais traiter plusieurs exemples; on comprend combien il serait aisé d'en étudier un très grand nombre, mais je verrais peu d'avantages à insister sur ces applications de règles entièrement précises.

1° Selon les conventions habituelles, j'appelle

$$p u$$

la fonction elliptique de M. Weierstrass, écrivant ainsi la formule

$$(1) \quad u = \int_{\infty}^{p(u)} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

qui en donne la définition, et je considère l'équation différentielle

$$(2) \quad y' + n p' u y^3 + 6 n p u y^2 + (2n + 1) \frac{p'' u}{p' u} y + 2(n + 1) = 0,$$

où la variable indépendante est u et le nombre n à volonté.

Les coefficients désignés au § VII par a_1, a_2, \dots, a_4 sont, dans l'équa-

tion (2), donnés de cette manière

$$(3) \quad a_1 = np'u, \quad a_2 = 2npu, \quad a_3 = \frac{2n+1}{3} \frac{p''u}{p'u}, \quad a_4 = 2(n+1);$$

ils satisfont aux identités

$$\begin{aligned} a_1' + 3(a_2^2 - a_1 a_3) &= n^2 g_2, \\ a_2 a_1' - a_1 a_2' + a_1(a_1 a_4 - a_2 a_3) + 2a_2(a_2^2 - a_1 a_3) &= 2n^3 g_3. \end{aligned}$$

Je puis donc appliquer immédiatement à l'équation (2) la méthode du § VII.

Soient

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3$$

les racines de l'équation numérique

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0;$$

la relation générale

$$m_i = -2ne_i$$

détermine les valeurs de m qui entrent dans les formules (16) et (18), § VII, et l'on trouve ensuite

$$\frac{\psi_i'}{\psi_i} = -\frac{4ne_i(pu + e_i)}{p'u},$$

puis, tout calcul fait des expressions qui en résultent pour les fonctions ω , on parvient à cette solution de l'équation proposée (2)

$$\frac{[2(pu - e_1) + \gamma p'u]^{e_1 - e_2} [2(pu - e_2) + \gamma p'u]^{e_2 - e_3} [2(pu - e_3) + \gamma p'u]^{e_3 - e_1}}{[(pu - e_1)^{e_1 - e_2} (pu - e_2)^{e_2 - e_3} (pu - e_3)^{e_3 - e_1}]^u} = h.$$

La constante h est l'arbitraire introduite par l'intégration; la vérification n'offre aucune difficulté.

2° Je choisis pour deuxième exemple l'équation

$$(4) \quad \nu' + \nu^3 + 3x^2 \nu = 0,$$

où je désignerai par ν la fonction inconnue.

Les coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 sont ici les suivants :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = x^2, \quad a_4 = 0;$$

ils satisfont à l'identité

$$L = 0$$

et, dans la substitution,

$$v_1 = r_1 \varphi(x),$$

qui ramène l'équation (4) à la forme normale, la fonction φ , donnée par la relation (7, § VIII), avec la condition $c = 0$, est égale à e^{x^2} . Voici les coefficients de l'équation transformée

$$(5) \quad \alpha_1 = e^{2x^2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2x^2, \quad \alpha_4 = 0;$$

ils donnent lieu aux deux identités

$$\alpha_1' + 3(\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3) = 0,$$

$$\alpha_2 \alpha_1' - \alpha_1 \alpha_2' + \alpha_1 (\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3) + 2\alpha_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3) = 0,$$

de sorte que, l'équation numérique (11, § VII), ayant ses trois racines nulles, le cas considéré est exceptionnel; il l'est encore d'ailleurs pour d'autres raisons.

Mais, si l'on compose le système

$$p(z) = 0, \quad p'(z) = 0, \quad p''(z) = 0,$$

corrélatif de l'équation

$$(6) \quad y'' + e^{2x^2} y'^3 + 6x^2 y' = 0,$$

obtenue en remplaçant r_1 par y' , il est facile d'en trouver la solution générale z . L'équation (6, § VII) se réduit ici à

$$Y'' = 0,$$

et l'on en conclut sans peine

$$(7) \quad z = e^{\frac{2x^2}{3}} (K_1 y^2 + 2K_2 y + K_3 - 2K_1 \int e^{-2x^2} dx).$$

L'équation (6) a donc pour intégrale

$$(8) \quad K_1 y^3 + 2K_2 y + K_3 - 2K_1 \int e^{-2x} dx = 0;$$

d'où, pour l'équation proposée, la suivante

$$2v^2 = \frac{e^{-2x}}{h + \int e^{-2x} dx},$$

que l'on tire de la relation

$$v = \gamma e^{x_1} = \gamma' e^{x_2},$$

établie entre γ et v .

CONCLUSIONS.

Dans ce Mémoire, je me suis borné à démontrer les résultats que j'avais communiqués à l'Académie des Sciences dans plusieurs Notes déjà anciennes : la dernière est datée du 20 septembre 1886.

Cependant, on le conçoit immédiatement, la méthode précédente s'étendrait, sans la moindre difficulté, à toutes les équations dont l'intégrale générale est linéaire par rapport aux constantes arbitraires. Mais c'est dans une autre voie que j'ai voulu trouver la généralisation de la théorie exposée dans ce travail. Je réserve, pour un prochain Mémoire, les conclusions générales que j'ai pu obtenir pour les équations de cette espèce

$$(1) \quad y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

et qui ont exigé la connaissance des invariants relatifs aux substitutions

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = f_1(x, y), \\ y_1 = f_2(x, y); \end{cases}$$

les recherches que j'ai faites à cette occasion donnent une importance fondamentale aux combinaisons qui forment les premiers membres des identités (2, § VI).

Les équations auxquelles j'ai consacré le présent Mémoire constituent une exception, car elles n'ont pas d'invariants pour les substitutions (2);

en outre, ce sont, parmi les équations (1), les plus simples; il était donc naturel de les étudier d'abord.

Les équations (1) comprennent, comme cas particuliers, toutes celles des lignes géodésiques, et cette circonstance peut suffire, je pense, à rendre leurs propriétés vraiment dignes d'intérêt (1).

(1) A ce point de vue, le présent Mémoire peut être regardé comme une étude des lignes géodésiques sur les surfaces à courbure constante.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
SUR LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES CORPS, ET SPÉCIALEMENT DANS LES GAZ PARFAITS; par M. <i>Hugoniot</i> , répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique....	3
L'ÉNERGIE LIBRE ET LES CHANGEMENTS D'ÉTAT; par M. <i>J. Moutier</i>	99
DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES; par M. <i>David</i> , Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite	147
SUR LES ARCS DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES; par M. <i>G. Humbert</i> , répétiteur à l'École Polytechnique.....	171
SUR QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES; par M. <i>R. Liouville</i> , répétiteur à l'École Polytechnique.....	189



JOURNAL

DE

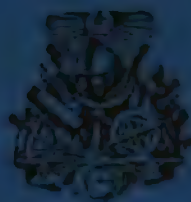
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PLATEAU

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT

.....
CINQUANTE-DEUXIÈME CAHIER.
.....



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

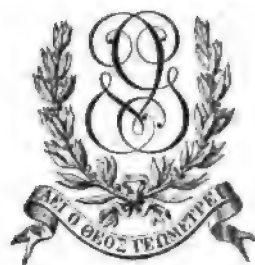
1889



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PUBLIÉ
PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION
DE CET ÉTABLISSEMENT.

.....
CINQUANTE-HUITIÈME CAHIER.
.....



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1889

Journal de l'École Polytechnique. — 58 Cahiers in-4, avec figures;
1794-1889..... 1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

VII ^e et VIII ^e , Chaque cahier.	8 fr.	» c.	XXXII ^e	5 fr.	» c.
IX ^e comprenant la théorie des fonctions analytiques, par Lagrange.....	7	»	XXXIII ^e	9	»
XI ^e	12	»	XXXIV ^e et XXXV ^e	10	»
XII ^e	12	»	XXXVI ^e et XXXVII ^e	10	»
XIII ^e	8	»	XXXVIII ^e et XXXIX ^e	8	»
XIV ^e	10	»	XL ^e à XLIII ^e	10	»
XVI ^e et XVII ^e	8	»	XLIV ^e à XLVIII ^e	12	»
XXI ^e et XXII ^e	8	»	XLIX ^e	12	»
XXIII ^e	6	»	L ^e	12	»
XXIV ^e	7	»	LI ^e	12	»
XXV ^e et XXVI ^e	8	»	LII ^e	12	»
XXVII ^e	9	»	LIII ^e	12	»
XXVIII ^e	7	»	LIV ^e	12	»
XXIX ^e et XXX ^e	5	»	LV ^e	14	»
XXXI ^e	9	»	LVI ^e	14	»
			LVII ^e	14	»
			LVIII ^e	10	»

Journal de l'École Polytechnique. — **Table des Matières** contenues dans
les 37 premiers Cahiers, formant 21 Volumes, suivie d'une Table générale par noms d'au-
teurs. In-4..... 2 fr.

— **Table des Matières** contenues dans les Cahiers XXXVIII à LVI, formant 16 Volumes,
suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4..... 1 fr. 50 c.

**Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en
1794, jusqu'en 1853 inclusivement, suivi de la liste des Élèves admis en
1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. MARIELLE.** Vol.
in-8..... 5 fr.

**Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au Réper-
toire de M. Marielle; par M. LE PRIEUR, Trésorier de l'École.** Vol. in-8..... 3 fr.



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES CORPS

ET SPÉCIALEMENT DANS LES GAZ PARFAITS;

PAR H. HUGONIOT,
Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE ⁽¹⁾.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT D'UN FLUIDE DANS UN TUYAU CYLINDRIQUE.

I. — EXPOSÉ DU PROBLÈME.

90. Les fluides dont le mouvement sera étudié dans ce Chapitre sont supposés renfermés dans une enveloppe cylindrique imperméable à la chaleur. On regarde comme négligeables les forces extérieures, les frottements contre l'enveloppe et la viscosité. Enfin on suppose que la conductibilité propre du fluide soit sensiblement nulle.

Le seul cas considéré sera celui où, à l'instant initial, la pression et la température sont constantes à l'intérieur du fluide. Il a été démontré (Chapitre II) que, dans ces conditions, le mouvement était régi par une

⁽¹⁾ Voir la première Partie, LVII^e Cahier, p. 3.
LVIII^e Cahier.

équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Les mouvements qu'on se propose d'examiner sont ceux qui se produisent quand, le fluide étant primitivement en repos, on assujettit l'une des extrémités de la colonne à une condition déterminée, en imprimant, par exemple, à la tranche extrême un certain mouvement, tel que la vitesse soit nulle à l'origine et varie ensuite d'une manière continue.

Les intégrales correspondantes sont celles qui sont compatibles avec l'intégrale $u = 0$, laquelle correspond à l'état de repos de la colonne. Si l'on représente le mouvement du corps par une surface rapportée à trois axes rectangulaires Ox , Ot , Ou , l'intégrale $u = 0$ n'est autre que le plan horizontal xOt .

Les caractéristiques de cette surface ont pour équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\varphi(0)}{\rho_0},$$

$\varphi(0)$ désignant ce que devient la fonction φ quand on y fait $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Posant $\frac{\varphi(0)}{\rho_0} = a^2$, les caractéristiques ont pour équation

$$x - at = K, \quad x + at = K',$$

et les surfaces intégrales cherchées sont celles qui se raccordent avec le plan horizontal suivant une caractéristique de l'un ou l'autre de ces systèmes.

Si le raccordement a lieu suivant une caractéristique du premier système, la vitesse de propagation du mouvement est a ; elle est égale à $-a$ quand ce raccordement se fait suivant une caractéristique du deuxième système.

Soient λ_1 et λ_2 les abscisses des extrémités de la colonne; supposant $\lambda_1 < \lambda_2$, si l'extrémité ébranlée est λ_1 , la vitesse de propagation doit être positive, et le raccordement se fait suivant la droite $x - at = \lambda_1$. Si, au

contraire, l'extrémité ébranlée est λ_2 , le raccordement se fait suivant la droite $x + at = \lambda_2$. Les phénomènes doivent évidemment être les mêmes dans les deux cas et ne peuvent d'ailleurs aucunement dépendre de la valeur de l'abscisse de l'extrémité ébranlée. On obtiendra donc toutes les surfaces intégrales en considérant l'une quelconque des deux extrémités, λ_1 par exemple, et attribuant à λ_1 une valeur déterminée.

Dans ce qui va suivre, on supposera $\lambda_1 = 0$ et λ_2 positif.

Les surfaces intégrales cherchées se raccordent donc avec le plan horizontal suivant la droite

$$x = at,$$

qu'elles admettent comme caractéristique.

91. S'il ne se produit pas de discontinuités au point commun aux deux intégrales, le mouvement qui prend naissance à l'origine parvient à l'extrémité λ_2 au bout d'un temps égal à $\frac{\lambda_2}{a}$. Là se produit un phénomène de réflexion dont la nature dépend de la condition imposée à l'extrémité λ_2 et par suite duquel il naît en ce point une nouvelle intégrale. L'étude de ce phénomène ne sera point abordée ici ; son analyse complète dépend d'intégrales qu'on n'est pas jusqu'à présent parvenu à découvrir, du moins tant que la fonction $\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ est laissée arbitraire.

On se bornera donc à étudier la propagation du mouvement dans un fluide en repos. Les intégrales qui représentent le mouvement qui se propage conviennent jusqu'au moment où le mouvement est parvenu à l'autre extrémité de la colonne. Quand la longueur de cette dernière est infinie, ces intégrales représentent complètement le mouvement du fluide, à moins qu'il ne s'introduise dans ce mouvement des discontinuités, ce qui, comme on le verra, peut fort bien arriver, lors même que la vitesse de la tranche ébranlée est nulle à l'origine et varie ensuite d'une manière continue.

92. On s'occupera plus spécialement des gaz parfaits, pour lesquels

on a

$$\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = mp_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1},$$

et l'on fera voir à quel point la théorie ordinaire, qui suppose leur mouvement représenté avec une approximation suffisante par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{mp_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dénature les phénomènes qui se produisent dans la réalité.

L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{mp_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui régit le mouvement des gaz parfaits, a été intégrée pour certaines valeurs de m au moyen de fonctions arbitraires et, pour les autres, par les intégrales définies (voir une Note de M. Darboux, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 10 juillet 1882). Malheureusement les intégrations n'ont été effectuées qu'après avoir rendu l'équation linéaire par la transformation de Legendre, qui consiste, comme on sait, à poser

$$u_1 = u - x \frac{\partial u}{\partial x} - t \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t_1 = \frac{\partial u}{\partial t},$$

de sorte qu'il faudrait faire subir aux intégrales des transformations inverses, d'ailleurs assez pénibles.

On ne fera point, dans ce qui va suivre, usage de ces intégrales qui pourraient cependant être utilisées plus tard pour découvrir des mouvements compatibles entre eux et analyser certains cas de réflexion. C'est là un point sur lequel je reviendrai dans un autre travail.

II. — RECHERCHE DES INTÉGRALES COMPATIBLES AVEC L'ÉTAT DE REPOS DU CORPS.

93. Considérant l'équation du mouvement d'un fluide

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et représentant par des surfaces les intégrales de cette équation, on sait que, pour chacune d'elles, les projections horizontales des caractéristiques satisfont à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Mais on peut trouver une autre équation qui a lieu le long de chacune des caractéristiques de la surface.

Différentiant, en effet, le long d'une de ces courbes les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial t}$, il faudra regarder x comme une fonction de t définie par l'équation précédente, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Multipliant la première équation par $-\frac{dx}{dt}$ et ajoutant à la seconde, il viendra, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur et tenant compte de l'équation proposée,

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Posant

$$\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left[\psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]^2,$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = \pm \psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

chacun des signes correspondant à l'un des systèmes de caractéristiques.

L'équation (2), dans laquelle on met pour $\frac{dx}{dt}$ sa valeur, devient

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \pm \psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Elle s'intègre immédiatement. Le premier membre étant, le long de la caractéristique, uniquement fonction de t , l'intégrale doit être égale à une constante; on a donc les deux équations suivantes, qui correspondent chacune à un système de caractéristiques,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \beta. \end{cases}$$

Dans la première de ces équations, la quantité α conserve la même valeur pour tous les points d'une caractéristique du premier système, mais elle varie quand on passe d'une caractéristique à l'autre. De même, la quantité β reste la même sur une caractéristique du deuxième système.

On reconnaît aisément que l'équation (3) n'est autre que la deuxième équation des caractéristiques (*voir* Chapitre I); dans ce cas particulier, elle s'intègre immédiatement; mais cette circonstance ne facilite pas beaucoup la recherche de l'intégrale générale de l'équation du mouvement; elle permet simplement de la ramener à être linéaire par une transformation sur laquelle il est inutile d'insister ici.

94. Cela posé, on démontre sans difficulté le théorème suivant :

Lorsque le plan tangent a la même direction en tous les points d'une courbe déterminée quelconque, tracée sur une surface de l'équation (1), cette surface est développable.

Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ représentent les coefficients de l'équation du plan tangent de la surface intégrale. Si donc, pour tous les points

d'une courbe tracée sur la surface, le plan tangent a la même direction, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ ont la même valeur en tous ces points.

Si la courbe en question n'est pas une caractéristique, elle est rencontrée par une infinité de caractéristiques des deux systèmes. Les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ restant les mêmes, α et β sont constants le long de la courbe. Mais, α demeurant constant le long d'une caractéristique du premier système et β le long d'une caractéristique du deuxième, il en résulte que α et β sont constants sur la surface; donc, d'après les équations (4), il en est de même de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. Le plan tangent est donc le même en tous les points de la surface et celle-ci doit se réduire à un plan. Il est visible d'ailleurs que tous les plans sont des surfaces intégrales.

Supposant maintenant que la courbe soit une caractéristique, du premier système par exemple, la deuxième des équations (4) montre que β est constant le long de la courbe. Mais par chacun des points de cette dernière passe une caractéristique du deuxième système et, le long de chacune de ces courbes qui peuvent être regardées comme les génératrices de la surface, β reste invariable. Donc la valeur de β est la même pour tous les points de la surface et cette dernière satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \beta,$$

dans laquelle β est une constante et qui représente, comme on le sait, une classe de surfaces développables.

On arriverait au même résultat en supposant que la courbe considérée est une caractéristique du deuxième système; seulement l'équation des surfaces serait

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire. Les deux équations (5) et (6) repré-

sentent d'ailleurs des surfaces identiques, car on passe de l'une à l'autre en changeant la direction de l'axe Ot .

Il est clair que toutes les intégrales de l'équation (5) satisfont à l'équation proposée. C'est du reste ce que l'on vérifie sans peine. On tire en effet de (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Multipliant la deuxième équation par ψ' et ajoutant à la première, remarquant en outre que $\psi'^2 = \varphi$, on retrouve l'équation proposée (1).

93. Les intégrales compatibles avec l'état de repos du corps sont représentées par des surfaces qui se raccordent avec le plan horizontal $u = 0$ suivant une ligne droite.

Elles admettent, tout le long de cette droite, le plan horizontal pour plan tangent; et, d'après le théorème du numéro précédent, ce sont des surfaces développables; elles font donc partie de celles qui sont représentées par les équations (5) et (6).

Les équations de ces surfaces doivent d'ailleurs être satisfaites quand on y fait $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; ainsi, s'il s'agit de l'équation (5), on doit prendre

$$\beta = -\psi(0)$$

et, pour l'équation (6),

$$\alpha = \psi(0).$$

Les équations du premier ordre auxquelles satisfont les intégrales compatibles avec le repos sont donc

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \psi(0),$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(0) - \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Les caractéristiques de ces deux systèmes d'équations sont nécessairement des droites, comme pour toutes les surfaces développables et, en formant le système corrélatif, on voit que le coefficient angulaire $\frac{dx}{dt}$ de la projection horizontale de ces droites est égal à $-\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ pour l'équation (7) et à $\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ pour l'équation (8). Le coefficient angulaire de la caractéristique commune au plan horizontal $u = 0$ et à la surface considérée est donc $-\psi'(0)$ s'il s'agit de l'équation (7), ou $\psi'(0)$ s'il s'agit de l'équation (8). Rien n'empêche de supposer $\psi'(0)$ positif, puisque le signe de la fonction ψ' n'est pas déterminé à l'avance.

Si donc on ne considère que les mouvements dont la vitesse de propagation est positive, c'est l'équation (8) qui fournit toutes les intégrales représentant ces mouvements.

Les intégrales de l'équation (8) sont représentées géométriquement par des surfaces développables appartenant à la même classe et l'on démontre aisément qu'elles jouissent de la propriété suivante :

Si, par un point de l'espace, on mène des parallèles aux génératrices de l'une des surfaces, le cône obtenu est le même, quelle que soit la surface considérée. Ce cône est d'ailleurs l'une des surfaces intégrales.

Les génératrices d'une surface développable sont tangentes à une courbe gauche, qu'on appelle arête de rebroussement, et qui sépare les deux nappes de la surface. La propriété précédente peut donc encore se traduire ainsi :

Les arêtes de rebroussement des surfaces développables (8) ont toutes même indicatrice sphérique.

Les résultats qui viennent d'être obtenus sont résumés dans le théorème suivant :

Tous les mouvements qui peuvent se propager dans un fluide en repos, homogène et non conducteur, qui est renfermé dans une enveloppe cylindrique, sont représentés géométriquement par des surfaces développables dont les arêtes de rebroussement ont la même indication sphérique.

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre, à laquelle satisfont toutes ces surfaces, se déduit sans difficulté de l'équation du deuxième ordre qui régit le mouvement (¹).

96. Toute fonction linéaire de x et de t est évidemment une intégrale de l'équation (1). Soit

$$(9) \quad u = Ax + Bt + C$$

une de ces intégrales : elle exprime que la dilatation est constante et égale à A , et la vitesse également constante et représentée par B . Le fluide est donc resté homogène, mais il est animé d'un mouvement de translation parallèlement aux génératrices de l'enveloppe.

La surface qui représente cette intégrale est un plan et ses caractéristiques sont évidemment des droites. On en conclurait, comme ci-dessus, que les intégrales compatibles avec la précédente sont encore des surfaces développables.

Pour obtenir les équations du premier ordre qui les représentent, on remarquera qu'elles doivent être satisfaites pour $\frac{\partial u}{\partial x} = A$, $\frac{\partial u}{\partial t} = B$. Les constantes β et α des équations (5) et (6) sont donc déterminées par les équations

$$\beta = B - \psi(A), \quad \alpha = B + \psi(A).$$

Les considérations du numéro précédent sont encore applicables. La théorie de la propagation du mouvement dans une intégrale, telle que (9),

(¹) L'intégrale particulière représentant les classes de surfaces développables est connue depuis longtemps; mais jusqu'ici on n'en a pas fait grand usage. Cependant, dans un Mémoire publié au tome VII du *Journal de l'École Polytechnique*, Poisson, considérant le mouvement d'un gaz dans un tuyau et admettant, contrairement à la réalité, que le fluide suit la loi de Mariotte, a cherché à tirer parti de cette intégrale particulière pour démontrer que la vitesse de propagation dans le fluide en repos est indépendante de la nature du mouvement qui se propage. Poisson a fait usage des formules d'Euler, de sorte que son intégrale se présente sous une forme différente de celle qui sera établie au n° 110; il n'en a déduit du reste aucune conséquence relative aux propriétés du mouvement. Le théorème auquel il parvient se démontre avec une bien plus grande généralité par la simple considération des caractéristiques, ainsi qu'on l'a montré au Chapitre III.

est la même que dans le repos. Seulement la classe de la surface développable dépend des coefficients de l'intégrale linéaire ou, plus exactement, de la direction de la normale au plan qui la représente.

97. Revenant maintenant aux mouvements qui se propagent dans un fluide en repos avec une vitesse positive, il reste à chercher comment on détermine ces mouvements quand on donne la condition imposée à l'extrémité.

Il faut d'abord intégrer l'équation (8) du n° 95,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(0) - \psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Les surfaces intégrales étant développables peuvent être, comme on le sait, représentées comme enveloppes d'un plan mobile, par les deux équations

$$\begin{aligned} u &= \gamma x + [\psi(0) - \psi(\gamma)]t + F(\gamma), \\ 0 &= x - \psi'(\gamma)t + F'(\gamma), \end{aligned}$$

dans laquelle F est une fonction arbitraire pour chaque forme de laquelle l'élimination de γ donnera l'une des intégrales cherchées. L'élimination étant supposée faite, on exprimera que u s'annule pour $x = 0$, $t = 0$, ce qui déterminera la constante que l'on peut regarder comme contenue dans $F(\gamma)$.

Mais il s'agirait de déterminer la fonction F de manière à satisfaire à une condition imposée à l'extrémité $x = 0$. Si, par exemple, on donnait à l'avance le mouvement de l'extrémité $x = 0$ par une relation $u = f(t)$, il faudrait qu'après l'élimination de γ l'équation obtenue fût satisfaite en remplaçant x par zéro et u par $f(t)$.

Le calcul présente quelques difficultés qui disparaissent quand, au lieu de chercher à déterminer le déplacement u en fonction de x et de t , on prend comme fonction inconnue de ces deux variables, soit la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$, soit la dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Il est visible, du reste, que le mouvement est parfaitement connu quand on a calculé, soit la vitesse, soit la dilatation, en fonction de x et de t , car dans chaque cas on en déduit le déplacement u par une simple quadrature.

98. Prenant d'abord pour fonction inconnue la vitesse et posant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v,$$

l'équation (8) du n° 95 devient

$$(10) \quad v = \psi(0) - \psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\psi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

D'ailleurs l'équation proposée (1) peut s'écrire, en remarquant que $\varphi = \psi'^2$,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left[\psi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

L'élimination de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ entre les deux dernières équations donne

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \psi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

D'ailleurs, de l'équation (10), on tire $\frac{\partial u}{\partial x}$ en fonction de v ; substituant dans l'équation précédente, elle prendra la forme

$$(11) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \theta(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

équation du premier ordre par rapport à $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Si l'on prend la dilatation pour fonction inconnue, les résultats seront

encore plus simples. Posant en effet

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z,$$

l'équation (8) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(0) - \psi(z),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\psi'(z) \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Or l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [\psi'(z)]^2 \frac{\partial z}{\partial x},$$

et l'élimination de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ donne l'équation à laquelle satisfait la dilatation, savoir

$$(12) \quad \frac{\partial z}{\partial t} + \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Elle est, comme l'équation (11), linéaire et du premier ordre.

99. Il est facile d'intégrer les équations (11) et (12). Considérant, par exemple, la première, le système corrélatif est

$$\frac{dt}{1} = \frac{\theta(\nu)}{dx} = \frac{d\nu}{0}.$$

Il définit, comme on sait, les caractéristiques de la surface qui représente géométriquement la fonction ν . Ces caractéristiques sont évidemment ici des droites horizontales dont le coefficient angulaire est fonction uniquement de l'ordonnée ν .

La surface représentative est ainsi une espèce de conoïde, que l'on définit complètement, quand on l'assujettit à passer par une courbe déterminée.

L'intégration du système corrélatif donne

$$v = \alpha, \quad t - \frac{x}{\theta(\alpha)} = \beta,$$

α et β désignant deux constantes, entre lesquelles il suffit d'établir une relation arbitraire pour obtenir l'intégrale générale qui se met ainsi sous la forme

$$(13) \quad v = F \left[t - \frac{x}{\theta(v)} \right],$$

F désignant une fonction arbitraire.

Les surfaces représentées par l'équation (12) sont des conoïdes du même genre; leur intégrale générale se met sous la forme

$$(14) \quad z = F_1 \left[t - \frac{x}{\psi(z)} \right],$$

F_1 désignant une nouvelle fonction arbitraire.

Les intégrales (13) et (14) se prêtent avec la plus grande facilité à la détermination des fonctions arbitraires F et F_1 par les conditions imposées à l'extrémité $x = 0$.

Si l'on donne à chaque instant la vitesse de la tranche extrême, v se trouve exprimé en fonction de t pour $x = 0$, par une équation de la forme $v = f(t)$. Or, si l'on fait, dans l'équation (13), $x = 0$, il reste $v = F(t)$. Il suffit donc, pour obtenir l'intégrale particulière qui correspond à ce cas, de prendre $F = f$.

On voit de même que, si l'on donne à chaque instant la dilatation de la tranche extrême, par une relation de la forme $z = f_1(t)$, il faut, pour obtenir l'intégrale (14) correspondante, faire $F_1 = f_1$.

Il n'est pas inutile de faire remarquer que, si l'on connaît, en fonction du temps, la vitesse de la tranche extrême $x = 0$, on connaît par cela même sa dilatation, et inversement, car les vitesses et les dilatations sont liées entre elles par la relation (9), qui peut s'écrire

$$v = \psi(0) - \psi(z),$$

laquelle est indépendante de x et de t .

100. Ainsi chaque intégrale peut être représentée par trois surfaces, l'une représentant le déplacement, l'autre la vitesse, la troisième la dilatation en fonction de x et de t . Ces trois surfaces, définies par des équations aux dérivées partielles du premier ordre, ont des caractéristiques rectilignes; celles des deux dernières surfaces sont toujours horizontales.

Si l'on considère les trois surfaces représentant un même mouvement, les caractéristiques correspondant aux mêmes valeurs de x et de t se projettent horizontalement suivant la même droite. En effet les coefficients angulaires des projections horizontales des caractéristiques des trois surfaces sont

$$\frac{dx}{dt} = \psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \frac{dx}{dt} = \theta(\nu), \quad \frac{dx}{dt} = \psi'(z).$$

Or $\theta(\nu)$ et $\psi'(z)$ ne sont pas autre chose que $\psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, ce qui démontre la proposition. Celle-ci résulte d'ailleurs de ce que, dans la surface développable, les quantités $\frac{\partial u}{\partial x} = z$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu$ restent constantes tout le long de chaque caractéristique.

III. — ÉTUDE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT.

101. Le lieu des points de la surface des dilatations, où l'ordonnée est constante, est une ligne droite. Il en résulte qu'une dilatation z partant de la tranche extrême $x = 0$ se propage dans le corps *sans s'altérer* avec une vitesse constante $\psi'(z)$ dépendant de la valeur de cette dilatation. La vitesse ν correspondante se propage de la même manière, *sans altération*. Le phénomène de la propagation est donc analogue à celui qui a lieu dans les solides élastiques de forme cylindrique; seulement la vitesse de propagation d'une dilatation dépend ici de sa valeur et n'est plus une constante absolue.

On peut encore envisager le phénomène d'une autre manière. Rien

n'empêche de regarder la dilatation de la tranche extrême $x = 0$ comme demeurant constante pendant chaque intervalle infiniment petit dt , et subissant une variation infiniment petite dz au commencement de chaque intervalle. La première dilatation dz , rencontrant devant elle un fluide en repos, se propage sans altération avec une vitesse égale à $\psi'(0)$, puisque la dilatation du fluide qu'elle rencontre est nulle. En même temps elle communique à ce fluide une vitesse infiniment petite $d\nu$, telle que

$$d\nu = \psi(0) - \psi(dz).$$

Si cette dilatation dz n'était suivie d'aucune autre, elle laisserait le fluide homogène et animé d'un mouvement de translation uniforme.

Mais, au bout du temps dt , une nouvelle dilatation dz , prend naissance à l'extrémité $x = 0$; le fluide dans lequel elle se propage possède toujours la même dilatation dz ; par conséquent sa vitesse de propagation est constante et égale à $\psi'(dz)$. De plus elle communique au fluide une nouvelle vitesse infiniment petite qui s'ajoute à la précédente.

On peut continuer à envisager les choses de la même manière : il est visible que la dilatation dz , qui prend naissance à l'instant t dans la tranche extrême, doit être regardée comme se propageant dans un fluide homogène dont la dilatation est z et qui est animé d'un mouvement de translation uniforme, avec une vitesse ν , ce qui ne peut altérer en rien la nature de la propagation. La nouvelle dilatation dz se propage ainsi avec une vitesse $\psi'(z)$ et imprime au fluide une nouvelle vitesse infiniment petite qui s'ajoute à la vitesse

$$\nu = \psi(0) - \psi(z)$$

qu'il possédait déjà.

C'est ainsi qu'on est conduit à considérer une succession d'ondes élémentaires, dont chacune se propage avec une vitesse constante. Mais ici la vitesse de propagation varie d'une onde élémentaire à la suivante et cette circonstance donne naissance à un phénomène nouveau que l'on ne peut rencontrer lorsqu'il s'agit des solides élastiques.

102. Supposant, en effet, que la vitesse de propagation d'une onde élémentaire soit supérieure à la précédente, de sorte que l'on ait

$$\psi'(z + dz) > \psi'(z),$$

la deuxième onde finira par rejoindre la première. Il est même facile de calculer la distance à laquelle se fera la jonction. Soient X cette distance, τ le temps employé par la première onde pour la parcourir, on a les deux équations

$$\tau \psi'(z) = X, \quad (\tau - dt) \psi'(z + dz) = X;$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\psi'(z)}{\psi''(z)} \frac{1}{\frac{dz}{dt}}, \\ (1) \quad X &= \frac{[\psi'(z)]^2}{\psi''(z)} \frac{1}{\frac{dz}{dt}}. \end{aligned}$$

Si d'ailleurs T désigne l'instant de la rencontre, compté à partir de l'origine du mouvement, et t l'instant où l'onde z a pris naissance,

$$\tau = T - t,$$

et l'équation

$$\tau \psi'(z) = X$$

devient

$$(2) \quad X = (T - t) \psi'(z).$$

Dans les équations (1) et (2), z est une fonction connue de t qui représente la dilatation de la tranche extrême $x = 0$; éliminant t entre les deux équations (1) et (2), on obtiendra une relation entre X et T , représentant géométriquement une courbe, lieu des points où deux ondes successives se rejoignent.

Il est clair que cette courbe n'est autre que l'enveloppe des projections des caractéristiques des trois surfaces représentant le mouvement considéré. Pour la surface des déplacements, les caractéristiques se coupent

deux à deux dans l'espace, le lieu de leur intersection constituant l'arête de rebroussement. La courbe représentée par les équations (1) et (2) est ainsi la projection de l'arête de rebroussement de la surface des déplacements.

L'intersection du cylindre projetant avec la surface des vitesses et la surface des déplacements donne, pour chacune d'elles, une courbe qui est évidemment le lieu des pieds des plus courtes distances de deux génératrices infiniment voisines. Chacune de ces courbes est la *ligne de striction* de la surface.

L'arête de rebroussement de la surface des déplacements et les lignes de striction des surfaces des vitesses et des dilatations sont donc, sur un même cylindre ayant ses génératrices perpendiculaires au plan xOt , ce qu'il était facile de prévoir à l'avance.

103. Quand on a obtenu l'équation de la courbe, projection horizontale de l'arête de rebroussement, il faut encore chercher la portion de cette courbe qu'il y a lieu de considérer dans l'étude du mouvement. Elle renferme généralement, en effet, une branche parasite provenant des génératrices de la surface développable, qui rencontrent le plan tOu , dans la partie de ce plan qui correspond aux valeurs négatives de t , et qui n'ont aucun rapport avec le mouvement des corps. On obtient le point de séparation des deux parties de la courbe en faisant $t = 0$ dans les équations (1) et (2), et il faut ensuite considérer tous les points qui correspondent aux valeurs positives de t .

Il faut ensuite rechercher le premier point de la courbe atteint par le mouvement. C'est généralement l'un de ceux où la courbe présente une tangente parallèle à Ox , c'est-à-dire où le rapport $\frac{dX}{dT}$ est infini. Si, comme cela arrivera d'ordinaire, les fonctions ψ' et $\frac{dz}{dt}$ restent finies, ainsi que leurs dérivées pendant tout le mouvement, on obtient, pour déterminer ces points, l'équation

$$(3) \quad \frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} + \frac{\psi'''(z)}{\psi''(z)} - \frac{2\psi''(z)}{\psi'(z)} = 0.$$

Il faudra rechercher, pour les valeurs de t déduites de cette équation, le sens de la concavité de la courbe, et prendre, parmi les points, celui pour lequel la valeur de T est la plus faible.

Enfin, il sera encore nécessaire de comparer le point ainsi obtenu à celui qui correspond à $t = 0$. Si la valeur de T qui correspond à ce dernier était la plus petite, c'est celui-ci qui serait d'abord atteint par le mouvement.

104. Par la marche qui vient d'être indiquée, on déterminera donc les coordonnées X , et T , du point de la projection de l'arête de rebroussement de la surface des déplacements ou des lignes de striction des surfaces des vitesses et des dilatations qui est le premier atteint par le mouvement. Soit t_1 la valeur correspondante de t , valeur qui d'ailleurs peut être nulle. On sait alors que les deux ondes élémentaires successives qui se sont rejointes les premières sont parties de l'extrémité $x = 0$ aux instants t_1 et $t_1 + dt$.

A partir de l'instant T_1 , commence un nouveau phénomène qui ne sera qu'imparfaitement étudié dans ce travail et sur lequel je reviendrai plus tard. On montrera néanmoins, plus loin, qu'il s'introduit, à partir de cet instant, des discontinuités dans les vitesses et les dilatations.

105. Si l'on coupe, par des plans perpendiculaires à Ot , les surfaces représentant le mouvement, on obtient, pour l'instant t correspondant, le déplacement, la vitesse ou la dilatation de tous les points du corps.

Considérant seulement les courbes obtenues en coupant par ces plans la surface des vitesses et celles des dilatations, il est visible que, si la vitesse de propagation de toutes les ondes élémentaires était la même, toutes les courbes, correspondant à une même surface, seraient identiques; on passerait de l'une à l'autre, en la transformant parallèlement à elle-même. C'est ce qui arrive dans les cylindres solides élastiques.

Mais, quand il s'agit d'un fluide quelconque, il n'en est plus ainsi. Les ondes élémentaires possédant des vitesses inégales, les points correspon-

dants de deux courbes des dilatations, par exemple, ont même ordonnée; mais leurs abscisses sont généralement différentes.

Les deux courbes, obtenues en coupant cette surface par des plans perpendiculaires à Ot et dont les distances à l'origine sont t et t' , se correspondent points par points, les points correspondants ayant même ordonnée z . La différence de leurs abscisses s'obtient en multipliant la différence $t' - t$ par la vitesse de propagation qui correspond à l'ordonnée z , savoir $\psi'(z)$; elle est aussi égale à $(t' - t)\psi'(z)$.

La courbe des dilatations se déplace ainsi dans le corps, mais en se déformant, suivant une loi qui dépend de la nature de la fonction $\psi'(z)$. La courbe des vitesses subit d'ailleurs des déformations analogues.

106. Si deux ondes élémentaires, parties de l'origine, aux instants t et $t + dt$, se sont rejointes à l'instant T et à la distance X , il est visible que la courbe des dilatations, correspondant à l'instant T , présente deux points infiniment voisins, situés sur la verticale du point X ; elle admet donc une tangente verticale pour le point dont l'abscisse est X , et il en est de même pour la courbe des vitesses.

Quand on considère la suite des courbes des dilatations et qu'on se borne à la portion située entre l'origine et le point où est parvenu le mouvement, il est clair que les premières de ces courbes n'auront généralement pas de tangente verticale, et si T_1 désigne l'instant où, pour la première fois, deux ondes élémentaires se rejoignent, la première courbe des dilatations présentant une tangente verticale sera celle qui correspond à l'instant T_1 . La tangente en question sera toujours une tangente d'inflexion, à moins que les deux ondes élémentaires, qui se sont rejointes à l'instant T_1 , ne soient celles qui sont parties de l'origine dès le début du mouvement. Dans ce cas, la tangente verticale est celle qui correspond au point où la courbe rencontre l'axe des x .

Tout ce que l'on vient de dire pourrait être répété pour la courbe des vitesses.

107. Les formules établies précédemment sont évidemment applicables jusqu'à l'instant T , où, pour la première fois, deux ondes élémentaires se rejoignent. A partir de cet instant, on conçoit qu'il doit se produire un trouble particulier, résultant de ce que toutes les ondes élémentaires, parties de l'origine à des instants différents, vont se rejoindre successivement. Ce phénomène nouveau prend naissance, d'après ce qui a été dit, quand le mouvement traverse l'arête de rebroussement de la surface qui représente les déplacements, c'est-à-dire quand intervient la deuxième nappe de la surface développable.

On a annoncé précédemment qu'il devait naître alors des discontinuités dans les vitesses et les dilatations. Ce fait peut être mis en évidence d'une manière très simple en choisissant convenablement la condition imposée à l'extrémité $x = 0$.

Pour cela, on va déterminer cette condition, de manière que toutes les ondes élémentaires, parties de l'extrémité, arrivent au même instant à un point d'abscisse X .

On a vu (n° 102) que, z représentant en fonction de t la dilatation de la tranche extrême $x = 0$,

$$\frac{[\psi'(z)]^2}{\psi'(z)} \frac{1}{\frac{dz}{dt}} = X.$$

Si X est une constante, l'équation précédente s'intègre; on peut en effet l'écrire

$$\frac{\psi''(z) \frac{dt}{dz}}{[\psi'(z)]^2} = \frac{1}{X}.$$

Intégrant et remarquant que z doit être nul pour $t = 0$, on trouve

$$(4) \quad \psi'(z) = \frac{X\psi'(0)}{X - t\psi'(0)}.$$

De cette équation, on tirera z en fonction de t et il suffira que la loi de succession des dilatations de la tranche extrême $x = 0$ soit représentée

par cette fonction, pour que toutes les ondes élémentaires se rejoignent à la fois à une distance X , que l'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement et à un instant $T = \frac{X}{\psi'(0)}$.

Dans ces conditions, il est clair que les caractéristiques des trois surfaces représentatives du mouvement se projettent horizontalement, suivant les droites passant toutes par le point dont les coordonnées sont X et T . La surface développable des déplacements se réduit ici à un cône ayant son sommet au point (X, T) et les surfaces des vitesses et des dilatations sont deux conoïdes à axe vertical.

108. La dilatation z de la tranche extrême, qui donne lieu au mouvement que l'on vient d'étudier, étant connue en fonction de t , on en déduit la vitesse v de cette tranche, au moyen de la formule

$$x = \psi(0) - \psi(z);$$

la vitesse se trouve ainsi exprimée en fonction du temps; et, pour réaliser ces conditions, il suffit de fermer le tuyau à l'extrémité $x = 0$, par un piston auquel on imprime un mouvement déterminé par l'équation précédente.

Mais, il faut remarquer que, d'après l'équation (4), la fonction $\psi'(z)$ devient infinie pour $t = \frac{X}{\psi'(0)}$; et, d'ordinaire, les quantités z , $\psi'(z)$ et $\psi(z)$, deviennent infinies en même temps. Il faudrait donc que la vitesse imprimée au piston devînt infinie à l'instant $\frac{X}{\psi'(0)}$.

Toutefois, on va voir que cela n'est pas nécessaire. En effet, quand, par suite de la condition imposée à l'extrémité $x = 0$, un mouvement a pris naissance dans le fluide supposé primitivement en repos, on peut chercher les nouvelles intégrales de l'équation compatibles avec celle qui représente ce premier mouvement; elles représenteront les mouvements qui peuvent se propager dans le premier.

Or la compatibilité exige que la surface représentant le nouveau mouvement ait avec la première une caractéristique commune, savoir celle

qui passe par le point $x = 0$, et qui a son coefficient angulaire positif.

La première surface étant développable, cette caractéristique est une droite; et, d'après le théorème du n° 94, la nouvelle surface est développable, puisque, se raccordant avec la première le long de cette droite, elle a le même plan tangent en tous les points de cette dernière. De plus, cette nouvelle surface appartient à la même classe que la première. En effet, la vitesse de propagation étant positive, elle fait partie des surfaces représentées par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \psi\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \alpha.$$

La constante α est d'ailleurs la même que pour la première surface, puisqu'il y a raccordement; donc $\alpha = \psi'(0)$.

En particulier, le plan tangent à la surface développable, le long de la caractéristique considérée, représente lui-même une intégrale compatible avec la première.

Quand, le fluide étant primitivement en repos, on imprime à la tranche extrême une vitesse définie par une certaine fonction analytique $f(t)$ du temps, on peut, à un instant donné t_1 , changer la nature de la fonction, pourvu que l'on n'introduise pas de discontinuité dans la vitesse. Jusqu'à l'instant t_1 , le mouvement est représenté par la surface développable correspondant à la fonction $f(t)$; mais, à partir de l'instant t_1 , une nouvelle intégrale prend naissance à l'extrémité $x = 0$; elle est représentée géométriquement par une autre surface développable se raccordant avec la première.

On peut supposer, par exemple, qu'à partir de l'instant t_1 la vitesse de la tranche extrême demeure constante; alors la nouvelle surface intégrale est le plan tangent à la développable le long de sa dernière caractéristique.

A ce plan tangent correspondent, pour les surfaces des vitesses et des dilatations, des plans horizontaux passant par leur dernière caractéristique.

109. Dans le cas particulier où la vitesse de la tranche extrême est celle

qui correspond à la dilatation z définie par l'équation (4), rien n'empêche de supposer que la vitesse v demeure constante à partir d'un instant t_1 , antérieur à $\frac{X}{\psi'(0)}$. Dans ces conditions, toutes les ondes élémentaires parties de l'origine jusqu'à l'instant t_1 , arriveront en même temps à la distance X .

Si l'on considère la courbe des dilatations aux divers instants du phénomène compris entre t_1 et $T = \frac{X}{\psi'(0)}$, cette courbe présente une partie rectiligne et une partie curviligne; cette dernière se déforme avec le temps et disparaît brusquement à l'instant T , pour faire place à une droite verticale.

La vitesse de la tranche extrême ne devenant plus infinie, l'expérience est physiquement réalisable. On voit que, pour tous les instants antérieurs à T , la dilatation et la vitesse varient d'une manière continue avec x ; mais, à l'instant T , il en est tout autrement : le fluide est partagé en deux parties par la tranche X ; l'une est encore en repos, tandis que pour tous les points de l'autre la dilatation est la même ainsi que la vitesse, chacune de ces quantités possédant une valeur aussi grande qu'on le désire.

On voit, dans cet exemple, qu'un mouvement continu, imprimé à la tranche extrême, avec une vitesse partant de zéro, sans jamais subir de variations brusques, peut cependant introduire dans le mouvement une discontinuité naissant brusquement et qui, comme on le fera voir dans le Chapitre V, persiste ensuite indéfiniment.

On s'exposerait donc à de graves erreurs, si l'on cherchait à appliquer les intégrales développables au delà des points où le mouvement rencontre l'arête de rebroussement des surfaces correspondantes. L'équation aux dérivées partielles, qui régit le mouvement, peut même cesser de convenir, car cette équation n'a été établie que pour le cas où il ne se produisait aucune discontinuité dans les vitesses des tranches.

IV. — MOUVEMENT DES GAZ PARFAITS.

410. La théorie générale qui précède va maintenant être appliquée

aux gaz parfaits. Leur équation aux dérivées partielles est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{mp_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La vitesse de propagation du mouvement dans le gaz en repos a pour valeur

$$\sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}} = a.$$

La fonction désignée plus haut par $\psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ est ici

$$\psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m+1}{2}} = a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m+1}{2}},$$

et l'on en déduit

$$\psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{2a}{m-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m-1}{2}}.$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces développables qui représentent les intégrales compatibles avec le repos et se propageant dans le sens positif devient donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2a}{m-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m-1}{2}} + \frac{2a}{m-1} = 0,$$

ce que l'on peut écrire, en désignant par v la vitesse et par z la dilatation,

$$v = \frac{2a}{m-1} (1+z)^{-\frac{m-1}{2}} - \frac{2a}{m-1}$$

ou, en résolvant par rapport à z ,

$$z = \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{-\frac{2}{m-1}} - 1.$$

Le rapport m des chaleurs spécifiques étant supérieur à l'unité, z et v sont toujours de signes contraires. Il en serait du reste encore de même si m pouvait être inférieur à l'unité.

Les formules précédentes deviennent en défaut quand $m = 1$; le gaz suivrait alors, pendant sa détente, la loi de Mariotte; c'est ce qui arriverait, par exemple, si l'enveloppe agissait sur le gaz, comme une source de chaleur parfaite, pour le maintenir constamment à la même température.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} a &= \psi'(0) = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}, \\ \psi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1}, \\ \psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= a \log\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces développables est alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \log\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$v + a \log(1 + z) = 0$$

ou

$$z = e^{-\frac{v}{a}} - 1.$$

111. Lorsque m est différent de l'unité, les intégrales compatibles avec l'état de repos du gaz sont données par les deux équations

$$\begin{aligned} u &= \gamma x - \frac{2at}{m-1} \left[1 - (1 + \gamma)^{-\frac{m-1}{2}} \right] + F(\gamma), \\ 0 &= x - at(1 + \gamma)^{-\frac{m+1}{2}} + F'(\gamma), \end{aligned}$$

où F désigne une fonction arbitraire et γ un paramètre dont l'élimination fournit, dans chaque cas, l'intégrale explicitement.

Quand $m = 1$, les intégrales sont données par les deux équations

$$\begin{aligned} u &= \gamma x - at \log(1 + \gamma) + F(\gamma), \\ 0 &= \gamma - \frac{at}{1 + \gamma} + F'(\gamma). \end{aligned}$$

Ces intégrales étant peu commodes, pour la détermination de la fonction arbitraire d'après la condition imposée à l'extrémité, on est conduit, comme dans le cas général, à considérer, au lieu de la fonction u de x et de t , les fonctions v et z , dont l'une représente la vitesse, l'autre la dilatation.

112. Considérant d'abord la vitesse v , on sait qu'elle satisfait à l'équation linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \theta(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$\theta(v)$ désignant la fonction $\psi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ ou $\psi'(z)$, dans laquelle on a remplacé z par sa valeur en fonction de v . Or

$$\psi'(z) = a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}, \quad z = \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{-\frac{2}{m-1}} - 1;$$

par suite,

$$\theta(v) = a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{m+1}{m-1}}$$

et l'équation aux dérivées partielles en v devient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Elle a pour intégrale générale

$$v = F \left[t - \frac{x}{a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{m+1}{m-1}}} \right],$$

F désignant une fonction arbitraire.

Dans le cas particulier où $m = 1$, on a

$$\psi'(z) = \frac{a}{1+z}, \quad 1+z = e^{-\frac{v}{a}};$$

par suite,

$$\theta(v) = ae^{\frac{v}{a}}.$$

L'équation aux dérivées partielles en v est alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} + ae^{\frac{v}{a}} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

et admet pour intégrale générale

$$v = F\left(t - \frac{x}{a} e^{-\frac{v}{a}}\right).$$

113. Reste à considérer la fonction z , qui satisfait, comme on sait, à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Cette équation devient, dans le cas des gaz parfaits,

$$\frac{\partial z}{\partial t} + a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

quand m est différent de l'unité, et

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{a}{1+z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

pour $m = 1$. Les intégrales générales sont

$$z = F_1\left[t - \frac{x}{a}(1+z)^{\frac{m+1}{2}}\right]$$

et, pour $m = 1$,

$$z = F_1\left[t - \frac{x}{a}(1+z)\right].$$

114. Le rôle important que jouent l'arête de rebroussement de la surface des déplacements et la ligne de striction de la surface des vitesses ou de celle des dilatations a été mis plus haut en évidence. Ces trois courbes ont une même projection horizontale qui, comme cela a été démontré, est

représentée par les équations

$$X = \frac{[\psi'(z)]^2}{\psi''(z) \frac{dz}{dt}},$$

$$T = t + \frac{\psi'(z)}{\psi''(z) \frac{dz}{dt}},$$

X et T étant les coordonnées courantes et z une fonction de t représentant la dilatation de la tranche extrême $x = 0$ aux différents instants du mouvement.

Quand il s'agit des gaz parfaits, on a

$$\psi'(z) = a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}, \quad \psi''(z) = -\frac{(m+1)a}{2}(1+z)^{-\frac{m+3}{2}};$$

par suite,

$$X = -\frac{2a(1+z)^{-\frac{m-1}{2}}}{(m+1) \frac{dz}{dt}},$$

$$T = t - \frac{2(1+z)}{(m+1) \frac{dz}{dt}}.$$

La valeur de X est négative si $\frac{dz}{dt}$ est positif et inversement.

Si donc $\frac{dz}{dt}$ est constamment positif, c'est-à-dire, si la dilatation de la tranche extrême est constamment croissante, les abscisses des points de la courbe seront toujours négatives, et il est visible que ces points ne seront jamais atteints par le mouvement; il n'y aura donc pas lieu de s'en préoccuper.

Si, pour une certaine valeur de z , $\frac{dz}{dt}$ s'annule, l'arête de rebroussement a un point à l'infini. La projection correspondante de la caractéristique est tangente à la courbe en ce point à l'infini; en d'autres termes, c'est l'asymptote. Cette dernière a pour coefficient angulaire $\psi'(z) = a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}$;

elle passe par le point dont les coordonnées sont $x = 0$, $t = t_1$, t_1 désignant la valeur de t qui annule $\frac{dz}{dt}$.

Lorsque le gaz se détend d'après la loi de Mariotte, $m = 1$; les formules précédentes deviennent

$$X = -\frac{a}{\frac{dz}{dt}}, \quad T = t - \frac{1+z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Quand on impose à l'extrémité $x = 0$ un mouvement donné, c'est la vitesse de la tranche extrême qui se trouve connue directement et non sa dilatation. Il est donc utile de remplacer z par v , dans les formules qui donnent les coordonnées X et T des différents points de la courbe.

Or, si m est différent de l'unité, on a

$$1 + z = \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{-\frac{2}{m-1}},$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{-\frac{m+1}{m-1}} \frac{dv}{dt},$$

et, en substituant dans les expressions de X et de T ,

$$X = \frac{2a^2 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}}}{(m+1) \frac{dv}{dt}},$$

$$T = t + \frac{2a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)}{(m+1) \frac{dv}{dt}}.$$

Lorsque $m = 1$,

$$1 + z = e^{-\frac{v}{a}}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{a} e^{-\frac{v}{a}} \frac{dv}{dt}$$

et les formules deviennent

$$X = \frac{a^2 e^{\frac{v}{a}}}{\frac{dv}{dt}}, \quad T = t + \frac{a}{\frac{dv}{dt}}.$$

115. La relation

$$v = \frac{2a}{m-1} (1+z)^{-\frac{m-1}{2}} - \frac{2a}{m-1}$$

donne lieu à une remarque curieuse. La dilatation z ne peut évidemment, quand elle est négative, devenir, en valeur absolue, supérieure à l'unité; car, s'il en était autrement, le raccourcissement, éprouvé par une branche, excéderait sa longueur primitive. On doit donc regarder, dans cette équation, z comme compris entre -1 et $+\infty$.

Faisant croître z , d'une manière continue, de -1 jusqu'à $+\infty$, on voit que, pour $z = -1$, la vitesse v est positive et infiniment grande; z diminuant en valeur absolue, il en est de même de la vitesse qui s'annule pour $z = 0$.

La dilatation z devient positive, la vitesse devient négative, et ces deux quantités augmentent en même temps en valeur absolue. Mais, quand z augmente indéfiniment, la valeur de v converge vers une limite finie et égale à $-\frac{2a}{m-1}$. Ainsi la vitesse du gaz ne peut varier qu'entre les deux limites $+\infty$ et $-\frac{2a}{m-1}$.

Les considérations qui précèdent sont applicables à la branche extrême. Supposant qu'au point $x = 0$ le gaz soit limité par un piston auquel on imprime une vitesse d'abord nulle, et progressivement croissante, dirigée de manière à dilater le gaz, quand cette vitesse atteindra la limite $\frac{2a}{m-1}$, la dilatation de la tranche extrême sera devenue infinie, et, si la vitesse du piston augmente encore au delà de $\frac{2a}{m-1}$, la tranche extrême cessera de suivre le piston dans son mouvement.

La quantité $\frac{2a}{m-1}$ représente ainsi la vitesse limite d'écoulement du gaz.

Pour les gaz simples, l'oxygène, l'hydrogène, l'azote, ainsi que pour l'air atmosphérique, m est sensiblement égal à 1,4. La vitesse, limite d'écoulement, de l'un de ces gaz, dont on donne la pression et la densité, s'obtient donc en multipliant par 5 la vitesse du son correspondant à cette pression et à cette densité.

Il est clair que, la dilatation z augmentant indéfiniment, la pression et la température absolue convergent vers zéro. La limite de vitesse $\frac{2a}{m-1}$, qui vient d'être définie, ne pourrait donc être réalisée pratiquement, puisque les propriétés admises pour les gaz parfaits, propriétés qui ont servi de base à la formation de l'équation aux dérivées partielles, cessent d'être applicables bien avant qu'on ait atteint le zéro absolu de température.

Cette vitesse $\frac{2a}{m-1}$ est cependant importante à considérer; elle est certainement supérieure à la vitesse d'écoulement que l'on pourrait réaliser dans la pratique et donne, par suite, une limite de cette dernière.

Pour l'air atmosphérique, supposé dans les conditions normales de température et de pression, la vitesse a du son étant d'à peu près 330^m, la vitesse d'écoulement serait ainsi 1650^m.

Dans le cas où le gaz suivrait la loi de Mariotte, les choses se passeraient tout autrement. Alors on aurait en effet

$$v = -a \log(1 + z),$$

de sorte que, z augmentant indéfiniment, la valeur de v convergerait vers $-\infty$.

116. Dans les gaz parfaits, la pression p est liée à la dilatation z par la formule

$$p = p_0(1 + z)^{-m}.$$

Il existe donc, entre la vitesse et la pression, la relation

$$v = \frac{m-1}{2a} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{m-1}{2m}} - \frac{2a}{m-1}.$$

La vitesse v est positive tant que p est supérieur à p_0 et négative dans le cas contraire. Quand p augmente indéfiniment, il en est de même de v ; lorsqu'au contraire p converge vers zéro, v tend vers la limite $-\frac{2a}{m-1}$.

On peut concevoir que la pression opposée à la tranche extrême, d'abord égale à p_0 , diminue progressivement de manière à converger vers zéro. Dans ces conditions, cette tranche prendra une vitesse négative, d'abord nulle, mais croissant constamment en valeur absolue. Cette vitesse convergera vers la limite $-\frac{2a}{m-1}$.

Si le gaz suivait la loi de Mariotte, la relation entre la vitesse et la pression serait

$$v = -a \log \left(\frac{p_0}{p} \right).$$

La vitesse augmenterait indéfiniment en valeur absolue si la pression convergeait vers zéro.

V. — ÉTUDE DE QUELQUES CAS DE MOUVEMENT DE GAZ PARFAITS.

117. Les formules générales vont être maintenant appliquées à quelques cas particuliers.

On supposera d'abord que la colonne gazeuse soit fermée, à l'extrémité $x = 0$, par un piston auquel on imprime un mouvement uniformément accéléré, la vitesse étant nulle à l'origine. Alors

$$v = \alpha t$$

pour $x = 0$. La dilatation z de la tranche extrême est donnée par la formule

$$z = \left[1 + \frac{(m-1)\alpha}{2a} t \right]^{-\frac{2}{m-1}} - 1$$

et sa pression est

$$p = p_0 \left[1 + \frac{(m-1)\alpha}{2a} t \right]^{\frac{2m}{m-1}}.$$

Quand la vitesse est positive, la dilatation de la tranche extrême est négative et se change en contraction; la pression est supérieure à p_0 et augmente indéfiniment avec le temps.

Lorsque, au contraire, la vitesse est négative, le coefficient α étant également négatif, la dilatation z est positive et croît avec le temps; la pression est inférieure à p_0 et décroît quand t augmente. Posant $\alpha = -\alpha_1$, on voit que, pour $t = \frac{2a}{(m-1)\alpha_1}$, la dilatation est infinie, tandis que p s'annule. La vitesse du piston est alors égale à $-\frac{2a}{m-1}$. Quand elle dépasse cette limite, la vitesse de la tranche extrême cesse de croître et le vide se produit à l'avant du piston.

Les formules qui donnent la vitesse et la dilatation en fonction de x et de t se déduisent sans difficulté des intégrales des nos 112 et 113, en remarquant qu'elles doivent se réduire aux valeurs ci-dessus de v et de z quand on y fait $x = 0$. On trouve ainsi

$$v = \alpha \left[t - \frac{x}{a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v \right)^{\frac{m+1}{m-1}}} \right],$$

$$1 + z = \left\{ 1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \left[t - \frac{x}{a} (1 + z)^{\frac{m+1}{2}} \right] \right\}^{-\frac{2}{m-1}}.$$

En remplaçant dans cette dernière équation $1 + z$ par $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{m}}$, on en déduirait sans difficulté une relation entre p , x et t .

Il est visible, d'après la première de ces formules, que toute vitesse v développée dans la tranche extrême se propage uniformément et se trouve transportée à la distance x après un temps égal à

$$\frac{x}{a} \left(1 + \frac{m-1}{2a} v \right)^{-\frac{m+1}{m-1}}.$$

De même, toute dilatation z développée dans la tranche extrême se propage sans altération, avec une vitesse

$$a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}.$$

Pour n'avoir pas à considérer de vitesses infinies, on peut supposer que la vitesse du piston cesse de croître, en valeur absolue, à partir d'un instant t_1 , demeurant ainsi constante et égale à $-\alpha t_1 = v_1$. Les formules précédentes sont applicables jusqu'à l'instant t_1 . A partir de ce moment, la colonne gazeuse peut être considérée, à chaque instant t , comme divisée en trois parties :

1° Une partie dans laquelle le mouvement ne s'est point encore propagé et qui, par suite, se trouve en repos;

2° Une partie pour laquelle le mouvement est représenté par les deux formules ci-dessus; elle est limitée à la tranche dont l'abscisse est αt_1 ;

3° Une partie dans laquelle la vitesse est constante ainsi que la dilatation et la pression. Celle-ci est limitée par la tranche dont l'abscisse est

$$\alpha t_1(1+z_1)^{-\frac{m+1}{2}},$$

z_1 désignant la dilatation constante qui correspond à la vitesse v_1 . D'ailleurs

$$(1+z_1)^{-\frac{m+1}{2}} = \left(1 + \frac{m-1}{2a} v_1\right)^{\frac{m+1}{m-1}} = \left[1 + \frac{m-1}{2a} \alpha t_1\right]^{\frac{m+1}{m-1}}.$$

L'abscisse qui limite la portion de la colonne où la vitesse est constante, ainsi que la dilatation, est ainsi

$$\alpha t_1 \left[1 + \frac{m-1}{2a} \alpha t_1\right]^{\frac{m+1}{m-1}}.$$

Dans cette partie, le gaz est homogène et animé d'un mouvement de translation uniforme.

118. Le mouvement étant représenté géométriquement, soit par la surface des vitesses, soit par celle des dilatations, on en obtient une idée très nette, en coupant l'une de ces surfaces par des plans perpendiculaires à Ot , et faisant varier d'une manière continue la distance de ces plans à l'origine. Les sections obtenues présentant des formes analogues pour ces deux surfaces, on se bornera à considérer celle des dilatations. Chaque section faite par le plan $t = \text{const.}$ représente l'ensemble des dilatations en tous points du fluide.

Si l'on considère les dilatations z et z' , qui ont pris naissance dans la tranche extrême aux instants τ et τ' , chacune de ces dilatations s'est propagée avec une vitesse particulière $a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}$ pour la première et $a(1+z')^{-\frac{m+1}{2}}$ pour la seconde. A l'instant t , la première s'est propagée pendant le temps $t - \tau$ et la seconde pendant le temps $t - \tau'$. La distance qui sépare les points où ces dilatations z et z' sont parvenues à l'instant t est donc, en supposant $\tau' > \tau$,

$$a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}(t-\tau) - a(1+z')^{-\frac{m+1}{2}}(t-\tau'),$$

ou

$$a\left[\tau'(1+z')^{-\frac{m+1}{2}} - \tau(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}\right] + at\left[(1+z)^{-\frac{m+1}{2}} - (1+z')^{-\frac{m+1}{2}}\right].$$

On voit que la distance qui sépare les deux points où les dilatations ont des valeurs données z et z' varie proportionnellement au temps. Cette distance augmente ou diminue suivant le signe du coefficient de at .

Il est facile de vérifier que le coefficient de at est positif, si la différence $z' - z$ est négative ou inversement.

Si donc la dilatation de la tranche extrême est algébriquement décroissante, la distance, qui sépare à un instant donné les points où les dilatations ont des valeurs données, augmente avec le temps. Le contraire a lieu quand la dilatation de la tranche extrême croît algébriquement avec le temps.

Joignant, dans la courbe des dilatations à l'instant t , les deux points

dont les ordonnées sont z et z' , on obtient une corde dont l'inclinaison sur l'axe des x augmente ou diminue avec t , suivant que la différence $z' - z$ est positive ou négative. La même remarque est applicable à la tangente à la courbe, car rien n'empêche de supposer que les valeurs de z et z' soient infiniment voisines.

On en conclut que, si la dilatation de la tranche extrême est toujours croissante avec le temps, les tangentes à la courbe des dilatations font, à mesure que le temps augmente, des angles de plus en plus grands avec l'axe des x ; en d'autres termes, la courbe se raidit de plus en plus. Le contraire a lieu quand la dilatation de la tranche se montre constamment décroissante.

119. Revenant au cas particulier où le mouvement de la tranche extrême est uniformément varié, on supposera d'abord que la vitesse est constamment négative; la vitesse de la tranche extrême est alors $-\alpha_1 t$, et la dilatation, nulle pour $t = 0$, est ensuite positive et croissante. Il est facile de voir comment se déforme, avec le temps, la courbe des dilatations.

Admettant en effet que la vitesse du piston cesse de croître à partir d'un instant t_1 , on voit qu'à un instant t inférieur à t_1 , la courbe a pour ordonnée initiale OA

$$z = \left[1 - \frac{m-1}{2\alpha} \alpha_1 t \right]^{-\frac{2}{m-1}} - 1.$$

L'ordonnée diminue ensuite de plus en plus jusqu'à s'annuler pour $OB = at$; à partir de ce point elle reste constamment nulle.

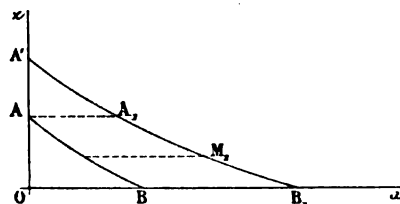
A un instant t' supérieur à t , mais inférieur à t_1 , l'ordonnée initiale OA' est plus grande que la précédente. Le point extrême B de la courbe s'est déplacé et est venu en B₁. Au point A de la courbe primitive correspond un point A₁ de la nouvelle courbe, ayant même ordonnée. Les points A et A₁, B et B₁ sont des points de même dilatation et, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, on a AA₁ < BB₁.

Si l'on considère deux points de même dilatation sur les deux courbes, M et M₁ par exemple, on a AA₁ < MM₁ < BB₁. La distance de deux points de la courbe situés sur la même horizontale est d'autant plus grande que

leur ordonnée est plus faible. Cette courbe se déforme donc en s'aplatissant de plus en plus; la tangente en un point dont l'ordonnée est donnée fait un angle de plus en plus faible avec l'axe Ox .

La déformation continue de cette manière jusqu'à l'instant t_1 . Si t_1 surpasse la valeur $\frac{2a}{(m-1)\alpha_1}$, l'ordonnée initiale OA augmente de plus en

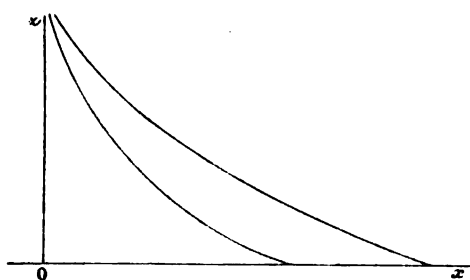
Fig. 1.



plus jusqu'à l'instant $t'' = \frac{2a}{(m-1)\alpha_1}$. A cet instant elle devient infinie; la courbe possède une branche infinie ayant pour asymptote l'axe des z . Or on a vu qu'à partir de ce moment le vide se faisait derrière le piston qui limite la colonne gazeuse; d'ailleurs les lois de la déformation sont toujours les mêmes et pour toutes les valeurs supérieures à t'' la courbe possède toujours la même asymptote verticale.

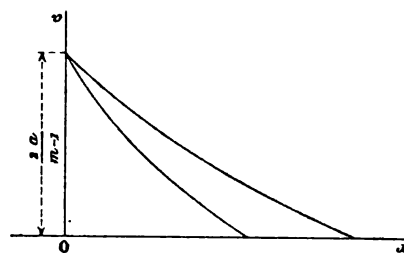
La courbe des vitesses suit des lois de déformation analogues à celle des dilatations. Toutefois, à l'instant $t'' = \frac{2a}{(m-1)\alpha_1}$, la vitesse n'est pas

Fig. 2.



Courbes des dilatations.

Fig. 3.



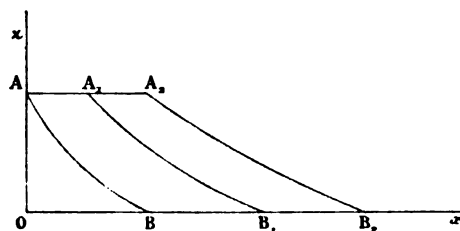
Courbes des vitesses.

infinie; elle est égale à $\frac{2a}{m-1}$ et reste dès lors constante. On a figuré ci-dessus deux états de la courbe des dilatations et de celle des vitesses qui correspondent à des instants supérieurs à t'' .

Il faudrait, pour que l'expérience fût réalisable, que la température du gaz pût descendre jusqu'au zéro absolu sans altération de ses propriétés, ce qui n'a jamais lieu.

Mais les choses se passent autrement quand la vitesse du piston cesse de croître à partir d'un instant t , inférieur à t'' . Soient z , la dilatation cor-

Fig. 4.



respondant à $v_1 = -\alpha_1 t_1$, AB la courbe des dilatations à cet instant; à un instant t supérieur à t_1 , la courbe comprendra trois parties, une horizontale AA₁, dont la longueur est égale à $a(t - t_1)(1 + z_1)^{-\frac{m+1}{2}}$, une partie curviligne A₁B₁ et, à partir du point B₁, l'axe des x ; la distance BB₁ est égale à $a(t - t_1)$ et, par suite, plus grande que AA₁. A un instant t' supérieur à t , la courbe aura pris la forme AA₂B₂ x , et ainsi de suite, la distance horizontale qui sépare les points extrêmes A₁, B₁ de la partie curviligne augmentant de plus en plus avec le temps.

Il n'y a pas lieu de s'arrêter à la courbe des vitesses, qui présente une forme tout analogue.

Si le tuyau est indéfini du côté des x positifs, rien ne s'oppose évidemment à ce que le mouvement continue à se propager indéfiniment de la même manière; la longueur de la partie curviligne augmentera alors indéfiniment.

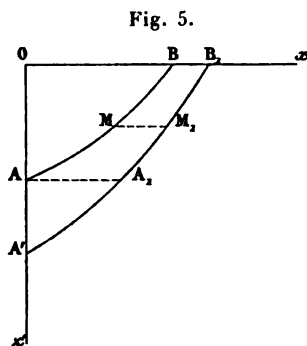
Lorsque, au contraire, le tuyau est limité, il arrive un moment auquel le point B₁ de la courbe des dilatations se trouve à l'extrémité du tuyau. A cet instant, se produit un phénomène de réflexion dont la nature dépend de la condition imposée à l'extrémité et qui ne sera point étudié dans ce travail. Les intégrales obtenues plus haut cessent dès lors d'être applicables.

120. Les choses se passent tout autrement quand la vitesse du piston

qui limite la colonne est dirigée de manière à comprimer le gaz. Les ordonnées de la courbe des dilatations sont alors négatives et toujours inférieures à l'unité. Si l'on considère les courbes AB et A'B₁, qui correspondent aux temps t et t' , et si l'on joint sur ces courbes deux points M et M₁ de même dilatation, on a

$$BB_1 < MM_1 < AA_1;$$

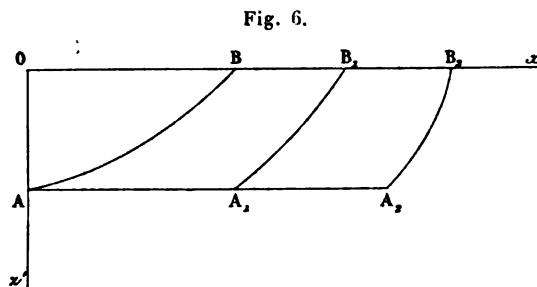
la distance MM₁ diminue quand l'ordonnée du point M se rapproche de



zéro. La tangente à la courbe en un point d'ordonnée déterminée forme ainsi avec l'axe des x un angle de plus en plus grand.

L'ordonnée à l'origine OA augmente avec le temps et convergerait vers l'unité si le piston conservait toujours son mouvement accéléré. Mais on peut supposer qu'à partir d'un temps t_1 , la vitesse du piston demeure constante; alors, pour tous les instants supérieurs à t_1 , la courbe comprendra une partie horizontale et une partie curviligne.

On a figuré ci-dessous trois positions de la courbe des dilatations, la



première AB correspondant à l'instant t_1 , les deux autres A₁B₁ et A₂B₂ à des instants t et t' supérieurs à t_1 .

La différence des abscisses qui correspondent aux deux extrémités de la partie curviligne décroît de plus en plus à mesure que le temps augmente; les tangentes forment avec l'axe des x des angles qui se rapprochent de l'angle droit.

On a vu précédemment que le moment où l'une des tangentes devenait verticale correspondait à celui où le mouvement rencontrait l'arête de rebroussement de la surface développable et l'on sait qu'à partir de cet instant les intégrales cessent généralement d'être applicables.

Il faut donc rechercher à quel moment l'on rencontre dans la courbe des dilatations une tangente verticale. L'instant où se produit ce phénomène est celui où la projection horizontale de l'arête de rebroussement de la surface des déplacements est rencontrée par le mouvement.

Or, les coordonnées X et T de cette courbe sont données par les équations

$$X = \frac{2a^3 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}}}{(m+1) \frac{dv}{dt}}, \quad T = t + \frac{2a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)}{(m+1) \frac{dv}{dt}},$$

v désignant la vitesse de la tranche extrême à l'instant t . Dans le cas considéré

$$v = \alpha t, \quad \frac{dv}{dt} = \alpha,$$

et la valeur de T devient

$$T = t + \frac{2a \left(1 + \frac{m-1}{2a} \alpha t\right)}{(m+1)\alpha}.$$

La valeur de T est évidemment croissante avec t ; c'est donc pour $t = 0$ que T a la valeur la plus faible.

Il en résulte que les deux ondes élémentaires successives qui se rejoignent les premières sont celles qui sont parties à l'instant zéro et à l'instant dt . Le point de la courbe des dilatations où, par suite de la déformation, la tangente devient, pour la première fois, perpendicu-

laire à Ox est celui dont l'ordonnée z est nulle. L'instant où se produit ce phénomène est donné par la valeur de T qui correspond à $t = 0$, savoir $\frac{2a}{(m+1)\alpha}$. Le mouvement s'est alors propagé à une distance égale à $\frac{2a^2}{(m+1)\alpha}$.

A l'instant $\frac{2a}{(m+1)\alpha}$, la courbe des vitesses présente aussi une tangente verticale qui correspond, comme pour la courbe des dilatations, au point dont l'ordonnée est nulle.

121. Les formules données plus haut sont applicables jusqu'à l'instant $t = \frac{2a}{(m+1)\alpha}$ ou jusqu'à ce que le mouvement se soit propagé à une distance égale à $\frac{2a^2}{(m+1)\alpha}$. Dans les conditions ordinaires, cette distance est très considérable. Ainsi, par exemple, s'il s'agit de l'air atmosphérique, dans les conditions normales de température et de pression, $a = 330^m$ environ, $m = 1,4$. On a alors

$$\frac{2a^2}{m+1} = 90750, \quad \frac{2a^2}{(m+1)\alpha} = \frac{90750}{\alpha}.$$

La distance à laquelle le mouvement s'est propagé, au moment où les formules cessent d'être applicables, s'obtient donc en divisant 90750 par l'accélération du mouvement du piston.

Si, par exemple, cette accélération était égale à 10^m par seconde, les formules ne cesseraient pas d'être applicables, avant que le mouvement se fût propagé à une distance supérieure à 9^{km} .

Cette distance est d'ailleurs en raison inverse de l'accélération du mouvement et l'on pourrait prendre α assez grand pour qu'elle devînt inférieure à toute longueur donnée.

C'est ici que se pose une question du plus haut intérêt : que se passe-t-il à partir du moment où les ondes élémentaires, parties de la tranche extrême à des instants différents, commencent à se rejoindre? Que deviennent les intégrales lorsqu'on dépasse l'arête de rebroussement de la surface des déplacements?

Il s'agit ici d'un nouveau problème extrêmement complexe, dont la solution générale ne sera pas abordée dans ce travail.

Toutefois un raisonnement bien simple montre qu'en général les formules qui représentaient jusque-là le mouvement doivent cesser d'être applicables à partir du moment où se produit ce phénomène.

Le mouvement du piston qui limite la tranche extrême étant uniformément accéléré, il arrive un moment où sa vitesse surpasse la vitesse a avec laquelle le mouvement se propage dans le fluide, tant qu'il ne s'est pas produit de discontinuité. Supposons que, le piston ayant acquis à l'instant t_1 une vitesse v_1 supérieure à a , on maintienne ensuite sa vitesse constante; soit, à cet instant t_1 , l la longueur que possède la colonne fluide atteinte par le mouvement.

S'il ne se produisait pas de discontinuité dans les vitesses, au point qui sépare la partie du fluide en repos de celle qui est en mouvement, la longueur de la partie en mouvement s'allongerait à l'avant avec une vitesse a et se raccourcirait à l'arrière avec une vitesse constante v_1 . A un instant t supérieur à t_1 , la longueur de cette partie en mouvement serait devenue

$$l - (t - t_1)(v_1 - a),$$

de sorte que cette longueur s'annulerait pour

$$t = t_1 + \frac{l}{v_1 - a}.$$

Il faudrait, pour cela, que toutes les tranches successivement atteintes par le mouvement eussent subi un raccourcissement égal à leur longueur primitive, ce qui est impossible. L'absurdité deviendrait encore plus manifeste si l'on attribuait à t des valeurs supérieures à $t_1 + \frac{l}{v_1 - a}$, car alors la longueur de la portion atteinte par le mouvement serait négative, ce qui n'a plus aucun sens.

Pour éviter des impossibilités physiques, il faut donc de toute nécessité qu'il se crée, au point de séparation des deux portions du fluide, une discontinuité dans les vitesses et les dilatations, car c'est dans ces con-

ditions seulement que la vitesse de propagation, dans un fluide au repos, peut être modifiée. Mais les considérations, au moyen desquelles a été établie l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement des gaz, deviennent inexactes quand il se produit des discontinuités. Il ne s'agit donc pas de trouver de nouvelles intégrales de l'équation primitive, mais avant tout de rechercher la nouvelle équation qui régit le mouvement.

On reviendra sur ce sujet dans le Chapitre V.

122. Les résultats que l'on vient d'obtenir restent encore les mêmes quand le gaz suit la loi de Mariotte et que le coefficient m devient égal à l'unité. Toutefois, quand $m = 1$, il n'existe plus, comme on l'a déjà montré, de vitesse limite d'écoulement, de sorte que, si le piston qui limite la colonne gazeuse est animé d'une vitesse tendant à dilater le gaz, cette vitesse pourra augmenter indéfiniment sans que le vide se produise à l'arrière.

Quelle que soit la loi du mouvement imprimé par le piston à la tranche extrême, on sera toujours conduit à des résultats analogues aux précédents si la vitesse est constamment croissante en valeur absolue. Seulement, quand la vitesse est dirigée de manière à comprimer le gaz, il pourra arriver, dans certains cas, que la première tangente de la courbe des dilatations qui devienne verticale ne soit pas celle qui correspond au point dont l'ordonnée est nulle. Il sera nécessaire, dans chaque cas particulier, de se livrer à une discussion à ce sujet, afin de reconnaître pendant combien de temps les intégrales obtenues expriment la solution du problème.

On peut encore faire la remarque suivante, qui s'applique non seulement au mouvement des gaz parfaits, mais au mouvement de tous les fluides qui ont été considérés dans ce Chapitre.

Considérons la courbe des dilatations et soient A et A' deux formes de cette courbe qui correspondent à des instants t et t' . Soient M et M' deux points de même ordonnée qui se correspondent.

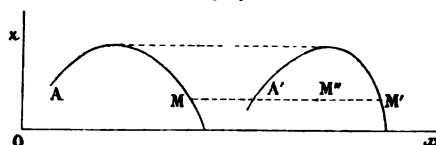
Soit t'' un autre instant du mouvement; posant

$$\frac{t'' - t}{t' - t''} = K,$$

la courbe des dilatations qui correspond à l'instant t'' est le lieu des points M'' qui divisent l'horizontale MM' en deux segments tels que

$$\frac{MM''}{M'M''} = K.$$

Fig. 7.



Il suffit donc de connaître deux des courbes des dilatations pour que l'on obtienne toutes les autres par une construction géométrique très simple. Les mêmes considérations sont applicables à la courbe des vitesses.

VI. — PROPAGATION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE PÉRIODIQUE.

123. Dans la théorie ordinaire de la propagation des vibrations sonores dans un tuyau cylindrique, telle qu'elle se trouve exposée dans les *Traité de Physique*, on suppose que le tuyau soit fermé à son extrémité par une lame vibrante dont la vitesse est représentée par une expression de la forme

$$v = \alpha \cos \beta t,$$

α et β étant des constantes, et dont le mouvement se communique à la tranche extrême pour se propager dans le gaz. L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement étant simplifiée et réduite à la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

on trouve que, pour un instant déterminé t , la courbe des dilatations et celle des vitesses ne sont autres que des sinusoides qui, quand le temps t varie, se déplacent d'un mouvement uniforme avec la vitesse a .

Il est intéressant de rechercher comment les résultats précédents sont modifiés dans la réalité.

A cause de la relation qui existe entre la vitesse et la dilatation en un point du corps, la dilatation de la tranche extrême est

$$z = \left[1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \sin \beta t \right]^{-\frac{2}{m-1}} - 1.$$

Chaque onde élémentaire, partie de la tranche extrême à l'instant t , se propage ensuite avec une vitesse constante, représentée par

$$\alpha(1+z)^{-\frac{m+1}{2}},$$

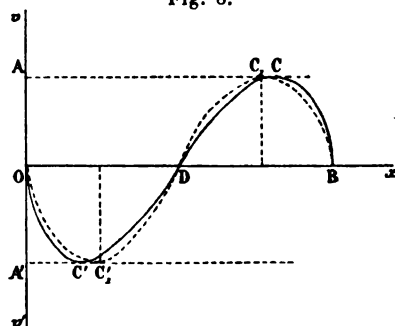
c'est-à-dire par

$$\alpha \left[1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \sin \beta t \right]^{\frac{m+1}{m-1}}.$$

Il est donc facile de construire, pour un instant quelconque t , la courbe des vitesses ou celle des dilatations.

124. On s'occupera plus particulièrement de la courbe des vitesses et l'on construira d'abord celle qui correspond à la fin de la première période du mouvement de la tranche extrême. La durée de cette période est $\frac{2\pi}{\beta}$.

Fig. 8.



L'onde élémentaire partie à l'origine du mouvement correspond à une vitesse infiniment petite et s'est propagée à la distance $\frac{2\pi a}{\beta}$ que l'on représente par OB.

L'onde élémentaire partie à l'instant $\frac{\pi}{2\beta}$ correspond à une vitesse α ; sa vitesse de propagation est

$$a \left(1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \right)^{\frac{m+1}{m-1}};$$

et, α étant supposé positif, elle est plus grande que a ; la distance à laquelle elle s'est propagée est

$$a \left(1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{3\pi}{2\beta} > \frac{3}{4} \text{ OB.}$$

Prenant donc sur Ov une longueur $OA = \alpha$ et prenant, à partir de A , parallèlement à Ox une longueur

$$AC = a \left(1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{3\pi}{2\beta},$$

on obtiendra le point le plus élevé de la courbe des vitesses.

L'onde élémentaire partie à l'instant $\frac{\pi}{\beta}$ correspond à une vitesse nulle; sa vitesse de propagation est a ; elle s'est donc, à l'instant $\frac{2\pi}{\beta}$, propagée à une distance $OD = \frac{a\pi}{\beta} = \frac{1}{2} \text{ OB.}$

Enfin l'onde élémentaire partie à l'instant $\frac{3\pi}{2\beta}$ correspond à une vitesse $-\alpha$; elle s'est propagée avec une vitesse

$$a \left(1 - \frac{m-1}{2a} \alpha \right)^{\frac{m+1}{m-1}},$$

inférieure par conséquent à a et la distance à laquelle elle est parvenue à l'instant $\frac{2\pi}{\beta}$ est

$$a \left(1 - \frac{m-1}{2a} \alpha \right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{\pi}{\beta} < \frac{\text{OB}}{4}.$$

Prenant donc sur Ov' une longueur $OA' = \alpha$ et, à partir de A' , parallèlement à Ox une longueur

$$A'C' = a \left(1 - \frac{m-1}{2a} \alpha \right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{\pi}{\beta},$$

on obtiendra le point C' de la courbe auquel correspond l'ordonnée minimum.

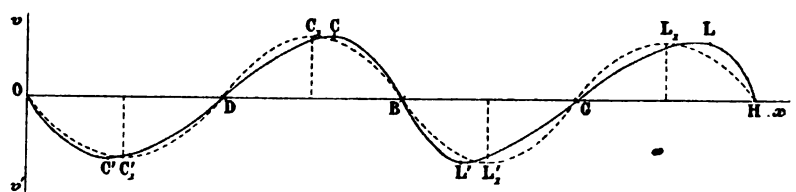
Des constructions analogues pourraient être faites pour tous les points de la courbe; mais les quatre points obtenus C' , D , C , B , auxquels il faut joindre le point O , suffisent pour donner une idée de sa forme et pour qu'on puisse la comparer avec la sinusoïde OC' , DC , B , que donnerait la théorie ordinaire et qui est tracée en pointillé sur la figure.

La courbe réelle a , en commun avec la sinusoïde, les trois points situés sur l'axe des x ; de plus, les deux courbes se coupent en deux autres points. L'abscisse du point le plus élevé C de la courbe réelle est supérieure à celle du point le plus élevé C , de la sinusoïde; le contraire a lieu pour le point le plus bas.

125. Pour construire la courbe des vitesses qui correspond à la fin de la deuxième période de la tranche extrême, on remarquera que cette courbe se compose d'abord d'une partie identique à la précédente, provenant des ondes élémentaires qui sont parties de l'origine entre les instants $\frac{2\pi}{\beta}$ et $\frac{4\pi}{\beta}$; puis d'une autre partie qu'on déduit aisément de la première par la connaissance des vitesses de propagation des différentes ondes élémentaires.

Transportant la première sinusoïde parallèlement à Ox , d'une lon-

Fig. 9.



gueur égale à OB , on obtiendra une courbe BL' , GL , H , qui représenterait la vitesse dans la portion BH du gaz, si les ondes élémentaires se propageaient toutes avec la même vitesse. Les points G et H appartiennent aussi à la courbe réelle. Pour obtenir le point le plus haut de cette der-

nière, on prendra, sur l'horizontale de L_1 , une longueur $L_1 L$, double de $C_1 C$, dans le sens des x positifs; on obtiendra de même le point le plus bas en prenant, sur l'horizontale du point L'_1 et dans le sens des x négatifs, une longueur $L'_1 L'$ égale au double de $C_1 C'_1$.

On peut continuer de la même manière et tracer successivement les courbes qui correspondent aux instants $\frac{6\pi}{\beta}, \frac{8\pi}{\beta}, \dots$

Il est visible qu'à mesure qu'on s'éloigne de l'origine les points les plus élevés s'écartent de plus en plus des points correspondants de la sinusoïde dans le sens des x positifs; les distances croissent comme la série des nombres naturels. De même les points les plus bas s'éloignent de plus en plus des points correspondants de la sinusoïde, mais du côté des x négatifs; les distances croissent encore comme la série des nombres naturels.

Quant aux points situés sur l'axe des x , ils sont communs aux deux courbes.

126. Ainsi tandis que, d'après la théorie ordinaire, la courbe des vitesses s'avancerait uniformément sans se déformer, on voit que, dans la réalité, cette courbe s'avance encore uniformément, mais en se déformant d'une manière continue. La pente de cette courbe s'adoucit de plus en plus dans la partie comprise entre l'un des points tels que L' et le point suivant L ; la pente augmente, au contraire, entre un point tel que C et le point suivant L' .

La propagation continue à s'effectuer de la sorte jusqu'au moment où l'arête de rebroussement de la surface développable des déplacements se trouve atteinte par le mouvement, c'est-à-dire jusqu'au moment où l'une des tangentes à la courbe des vitesses devient perpendiculaire à l'axe Ox .

Considérant la courbe, projection sur le plan horizontal xOt de l'arête de rebroussement, les coordonnées X et T d'un point sont

$$X = \frac{2a^2 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}}}{(m+1) \frac{dv}{dt}}, \quad T = t + \frac{2a \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)}{(m+1) \frac{dv}{dt}}.$$

Dans ce cas,

$$v = \alpha \sin \beta t, \quad \frac{dv}{dt} = \alpha \beta \cos \beta t,$$

et la valeur de T devient

$$T = t + \frac{2a \left(1 + \frac{m-1}{2a} \alpha \sin \beta t \right)}{(m+1) \alpha \beta \cos \beta t}.$$

Il s'agit de chercher à quelle valeur de t correspond le minimum de T. Or le second membre se compose de deux parties dont l'une t est croissante, l'autre périodique. Il suffit donc de chercher la valeur de t , comprise entre zéro et $\frac{2\pi}{\beta}$, qui rend T minimum.

Il faut d'abord faire abstraction du cas où le numérateur de la partie périodique pourrait s'annuler : il faudrait pour cela que la vitesse $\alpha \sin \beta t$ devînt négative et égale en valeur absolue à $\frac{2a}{m-1}$, c'est-à-dire à la vitesse limite d'écoulement.

Cela posé, on démontre que si α , c'est-à-dire le maximum de vitesse de la tranche extrême, est très petit par rapport à a , ainsi que cela a toujours lieu dans les vibrations sonores, la plus petite valeur de T a lieu pour $t = 0$ et est égale, par suite, à

$$\frac{2a}{(m+1)\alpha\beta}.$$

C'est le temps pendant lequel le mouvement se propage d'après les règles qui ont été données ci-dessus. A cet instant, il est parvenu à une distance

$$X = \frac{2a^2}{(m+1)\alpha\beta}.$$

A partir de là, il se produit un phénomène nouveau, qui introduit d'ordinaire des discontinuités dans les vitesses.

127. On peut faire une application numérique, afin d'avoir une idée de cette distance X.

Soient N le nombre des vibrations complètes exécutées dans une seconde par la tranche extrême $x = 0$, 2λ l'amplitude totale de la vibration ; il est facile de voir que

$$\beta = 2N\pi, \quad \alpha = 2\pi N\lambda,$$

de sorte que la valeur de X devient

$$X = \frac{a^2}{2(m+1)N^2\pi^2\lambda}.$$

Supposant, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de l'air atmosphérique dans les conditions ordinaires de température et de pression, $a = 330^m$, $m = 1,4$ environ. Si l'on fait $N = 500$, $\lambda = 0^m,001$, on trouve pour X une valeur inférieure à 10^m .

On voit, par cet exemple, que les théories ordinaires de la propagation des vibrations sonores dans les gaz sont bien rapidement en défaut, même quand il s'agit de mouvements de faible amplitude.

Quand il s'agit, en particulier, de la propagation d'un mouvement périodique, la courbe ondulée, qui représente à un instant donné la vitesse ou la dilatation d'une tranche, se propage en se déformant. Toutefois, tant que le mouvement n'atteint pas l'arête de rebroussement de la surface développable, la vitesse de propagation n'est pas altérée ; et, à ce point de vue, la théorie habituelle fournit des résultats exacts.

Mais cette arête de rebroussement est atteinte par le mouvement après un parcours qui, dans les circonstances ordinaires, n'est pas bien considérable ; et alors se manifestent de nouveaux phénomènes.

La distance X , à partir de laquelle les formules obtenues cessent d'être applicables, peut se mettre sous une autre forme. On appelle, comme on sait, *longueur d'onde* le produit $\frac{a}{N}$ de la durée d'une vibration complète par la vitesse du son ; désignant cette longueur d'onde par L , on a

$$X = \frac{L^2}{2(m+1)\pi^2\lambda}.$$

Ainsi la distance X est proportionnelle au carré de la longueur d'onde

et en raison inverse de l'amplitude du mouvement vibratoire imprimé à la tranche extrême.

L'étude de la courbe des dilatations aurait conduit à des résultats tout à fait analogues à ceux qui ont été obtenus en envisageant la courbe des vitesses. De plus, rien ne serait changé dans ces résultats si, le gaz suivant la loi de Mariotte, le coefficient m devenait égal à l'unité.

VII. — ÉTUDE D'UN CAS SINGULIER DE PROPAGATION DU MOUVEMENT.

128. On a fait voir au n° 107 que, pour un fluide quelconque en repos, il est possible de déterminer la condition imposée à la tranche extrême, pour que toutes les ondes élémentaires, parties de l'origine aux différents instants du mouvement et qui se propagent avec des vitesses différentes, se rejoignent à la fois à une même distance de l'origine.

Soit X cette distance : la vitesse de propagation, correspondant à la dilatation z , étant représentée par $\psi'(z)$, il faut que la dilatation de la tranche extrême satisfasse à la condition

$$\psi'(z) = \frac{X\psi'(0)}{X - t\psi'(0)}.$$

Dans le cas des gaz parfaits,

$$\psi'(0) = a, \quad \psi'(z) = a(1 + z)^{-\frac{m+1}{2}},$$

de sorte que la formule précédente devient

$$(1 + z)^{-\frac{m+1}{2}} = \frac{X}{X - at};$$

d'où

$$1 + z = \left(1 - \frac{at}{X}\right)^{\frac{2}{m+1}}.$$

La dilatation z de la tranche extrême étant donnée par cette formule, on obtient aisément la vitesse qu'il faut imprimer à cette tranche, en fai-

sant usage de la relation qui existe entre la vitesse et la dilatation. On trouve ainsi

$$(1) \quad v = \frac{2a}{m-1} \left(1 - \frac{at}{X}\right)^{-\frac{m-1}{m+1}} - \frac{2a}{m-1},$$

formule qui aurait pu être obtenue directement par l'intégration de l'équation

$$X = \frac{2a^2 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}}}{(m+1) \frac{dv}{dt}},$$

dans laquelle X devrait être regardée comme une constante.

Quand le gaz suit la loi de Mariotte, les expressions de la dilatation z de la tranche extrême et de sa vitesse v deviennent

$$(2) \quad \begin{aligned} 1 + z &= 1 - \frac{at}{X}, \\ v &= -a \log \left(1 - \frac{at}{X}\right). \end{aligned}$$

129. Pour réaliser ces conditions, il suffit de limiter la colonne gazeuse par un piston et d'imprimer à ce piston un mouvement défini par l'équation (1) ou par l'équation (2).

La vitesse du piston, d'abord nulle, est constamment croissante; elle devient infinie à l'instant $\frac{X}{a}$, ainsi qu'il est facile de le concevoir *a priori*, puisque l'onde partie à ce dernier instant de l'extrémité de la colonne doit avoir une vitesse de propagation infinie.

L'accélération du mouvement du piston est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2a^2}{X(m+1)} \left(1 - \frac{at}{X}\right)^{-\frac{2m}{m+1}}$$

et l'on voit qu'elle est aussi constamment croissante et devient infinie pour $t = \frac{X}{a}$.

Il serait impossible, dans la pratique, de faire croître indéfiniment la vitesse du piston ; mais rien n'empêche de supposer qu'après avoir fait varier cette vitesse conformément à la formule (1), ou à la formule (2) si le gaz suit la loi de Mariotte, pendant un certain temps t_1 , on maintienne ensuite cette vitesse constante.

Soient v_1 la vitesse acquise au temps t_1 , z_1 la dilatation correspondante, le gaz se trouvera, pour tout instant t supérieur à t_1 , divisé en trois parties animées de mouvements différents.

Au delà de l'abscisse at , le gaz sera en repos ; en deçà de l'abscisse $a(1 + z_1)^{\frac{m+1}{2}}(t - t_1)$, la dilatation sera partout z_1 et la vitesse v_1 ; entre les deux abscisses que l'on vient d'indiquer, la vitesse et la dilatation varieront d'un point à l'autre.

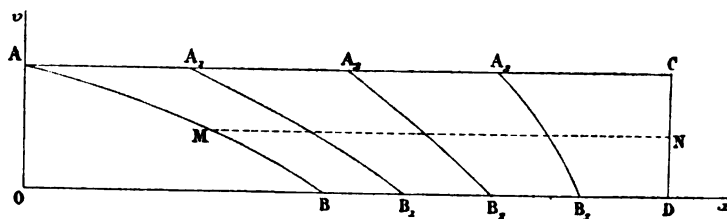
Toutes les ondes élémentaires, parties de l'origine entre t et t_1 , se rejoignant à la distance X et à l'instant $T = \frac{X}{a}$, il en résulte que la partie intermédiaire disparaît à cet instant, de sorte qu'alors le gaz se trouve partagé en deux parties : l'une est en repos et sa dilatation est nulle ; l'autre est animée de la vitesse v_1 et possède la dilatation z_1 .

130. La propagation du mouvement est mise plus nettement en évidence par l'étude des courbes des vitesses et des dilatations.

Considérant, par exemple, la courbe des vitesses, soient AB la forme qu'elle possède à l'instant t_1 , OD la distance X .

Menant l'ordonnée DC et une série d'horizontales, telles que MN ,

Fig. 10.



limitées par la courbe AB et cette ordonnée, on sait que le lieu des points qui divisent les droites telles que MN , dans un rapport donné, est une

autre courbe de dilatation correspondant à l'un des instants compris entre t_1 et T .

Divisant, par exemple, toutes ces horizontales en quatre parties égales, on obtient trois courbes intermédiaires A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , qui représentent la distribution des vitesses dans les tranches aux instants

$$t_1 + \frac{T-t_1}{4}, \quad t_1 + \frac{T-t_1}{2}, \quad t_1 + \frac{3(T-t_1)}{4}.$$

On voit la partie curviligne de la courbe se raidir de plus en plus à mesure que le mouvement se propage, pour se transformer brusquement en une droite verticale à l'instant T .

Par un mouvement continu imprimé à la tranche extrême, on arrive donc à créer dans la colonne une discontinuité qui, comme on le montrera dans le Chapitre V, ne peut plus dès lors disparaître. Quand on passe de la tranche X à la tranche infiniment voisine, la vitesse passe de v_1 à zéro et la dilatation de z_1 à zéro.

Les valeurs de X et de v_1 peuvent être prises arbitrairement; quant à la dilatation z_1 , elle est liée à v_1 par la relation

$$v_1 = \frac{2a}{m-1} (1+z_1)^{-\frac{m-1}{2}} - \frac{2a}{m-1}.$$

Le temps t_1 nécessaire pour communiquer à la tranche extrême la vitesse v_1 se déduit de l'équation (1) qui donne

$$t_1 = \frac{X}{a} \left[1 - \left(1 + \frac{m-1}{2a} v_1 \right)^{-\frac{m+1}{m-1}} \right].$$

Ce temps est proportionnel à la distance X .

Le maximum de l'accélération du mouvement du piston a lieu pour $t = t_1$; il a donc pour valeur

$$\frac{2a^2}{(m+1)X} \left[1 + \frac{m-1}{2a} v_1 \right]^{\frac{2m}{m-1}},$$

ce qui, quand la vitesse v , est très petite par rapport à a , se réduit sensiblement à

$$\frac{2a^2}{(m+1)X};$$

si l'on prenait $X = 100^m$, on trouverait, en supposant que le gaz dont il s'agit est l'air atmosphérique, dans les conditions normales de température et de pression, que cette accélération est un peu supérieure à 900^m .

VIII. — MOUVEMENT D'UN MOBILE SOUMIS A LA PRESSION D'UNE COLONNE GAZEUSE.

131. Un gaz est renfermé dans un cylindre. L'une des bases est inébranlable, l'autre est fermée par un piston de masse M . On néglige la pression extérieure qui s'exerce sur le piston. Le système étant en repos et abandonné à lui-même, on demande le mouvement que prendra le piston et le mouvement du gaz.

Ce problème a été l'objet des travaux de plusieurs géomètres, parmi lesquels il faut citer particulièrement Lagrange, qui lui a consacré un Mémoire resté d'abord inédit et que Poisson a fait publier plus tard dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

C'est en cherchant à déterminer analytiquement le mouvement des projectiles dans l'âme des bouches à feu que Lagrange a été conduit à aborder ce problème. Supposant en effet la poudre entièrement brûlée avant que le projectile ait commencé son mouvement, les produits de la combustion constituent un fluide que l'on peut regarder comme en repos à l'instant initial, la pression étant constante et la vitesse nulle en tous ses points.

La masse du canon étant très grande par rapport à celle du boulet, la bouche à feu peut être regardée, sans grande erreur, comme inébranlable. Le boulet est d'ailleurs mis en mouvement par la seule pression du gaz fluide.

Lagrange admettait que la pression du fluide était, pendant la détente,

en raison inverse de la puissance m du mouvement; dans ces conditions, l'équation aux dérivées partielles qui le régit n'est autre que celle qui correspond aux gaz parfaits. Lagrange cherchait à déterminer l'intégrale qui convient aux conditions particulières du problème. Il paraît, au reste, avoir été peu satisfait des résultats obtenus, car il n'a pas jugé à propos de livrer le résultat de ses calculs à la publicité.

Plus récemment, Piobert a fait du même problème l'objet principal de ses travaux. Il admettait, comme Lagrange, que la pression des produits de la combustion de la poudre est en raison inverse de la puissance m du volume qu'ils occupent. Cette hypothèse semblait d'ailleurs assez exactement justifiée par les expériences de Rumford. L'équation aux dérivées partielles, qui régit le mouvement du fluide, était donc encore, pour Piobert, celle qui correspond aux gaz parfaits.

Piobert a un peu compliqué son problème en cherchant à tenir compte du mouvement du canon. Il est arrivé, au moyen de calculs très longs et dépourvus de toute élégance, à obtenir des formules qui ne peuvent aucunement représenter le phénomène, attendu qu'elles sont en désaccord avec l'équation aux dérivées partielles.

L'insuccès des tentatives de Lagrange et de Piobert paraît avoir découragé les géomètres. Le problème a d'ailleurs perdu une grande partie de l'intérêt qu'il présentait pour les artilleurs. L'hypothèse de la combustion instantanée de la poudre s'écartait déjà beaucoup de la vérité à l'époque où Lagrange et Piobert se livraient à leurs recherches. Cependant, l'ancienne poudre à canon, dont les grains avaient de faibles dimensions, était alors exclusivement employée. Aujourd'hui, l'artillerie fait usage de poudre à gros grains dont la combustion s'opère avec lenteur et n'est même pas toujours complètement achevée quand le projectile sort de la pièce. L'hypothèse d'une combustion instantanée ne pourrait donc conduire qu'à de grossières erreurs.

D'autre part, la relation qui existe, pendant la détente, entre la pression et le volume des produits de la combustion de la poudre, est loin d'être aussi simple que le supposaient Lagrange et Piobert. L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement différerait donc de celle des

gaz parfaits, même si l'on négligeait le temps nécessaire pour effectuer la combustion complète de la charge.

La question présente toutefois un certain intérêt au point de vue spéculatif et au point de vue historique. Dans ce qui va suivre, on donnera une partie de la solution ; mais, auparavant, il n'est pas inutile de montrer la cause de l'insuccès des tentatives de Lagrange et de Piobert.

132. Supposant que la tranche extrême du gaz, en contact avec le piston ou le projectile, ait pour abscisse $x = 0$, on désigne par λ l'abscisse de l'autre extrémité, que l'on suppose assujettie à rester en repos.

L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où $a^2 = \frac{mp_0}{\rho_0}$, p_0 étant la pression initiale et ρ_0 la densité initiale, qui sont les mêmes pour tous les points du fluide.

Les conditions initiales sont $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, puisque le gaz est supposé en repos.

Si M désigne la masse du piston en contact avec l'extrémité $x = 0$, son mouvement est causé uniquement par la pression de la tranche extrême ; les conditions imposées aux extrémités sont

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega p \text{ pour } x = 0 \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ pour } x = \lambda,$$

quel que soit t , ω désignant la section du cylindre.

Lagrange et Piobert se proposaient de déterminer une intégrale unique de l'équation aux dérivées partielles, satisfaisant aux deux conditions initiales et aux conditions d'extrémité. Or on a montré, dans le Chapitre III, que le problème ainsi posé est généralement insoluble ; il est impossible de représenter l'ensemble du phénomène par une seule et unique expression analytique. On ne peut obtenir la solution de la question que par une infinité d'intégrales dont chacune représente le mouvement pendant un certain temps.

Dès le début, prend naissance, à l'extrémité $x = 0$, une intégrale u_1 , compatible avec le repos et satisfaisant à la condition imposée à cette extrémité. Celle-ci se propage avec une vitesse a et parvient à l'extrémité λ , au bout d'un temps $t_1 = \frac{\lambda}{a}$. A cet instant, une autre intégrale u_2 prend naissance à l'extrémité λ ; elle doit satisfaire à la condition imposée à cette extrémité et, de plus, être compatible avec l'intégrale u_1 , ce qui suffit pour la déterminer.

L'intégrale u_2 se propage dans u_1 avec une certaine vitesse, variable d'ailleurs à chaque instant, et arrive à l'extrémité $x = 0$, à un certain instant t_2 , auquel prend naissance, dans la tranche $x = 0$, une nouvelle intégrale u_3 compatible avec u_2 et satisfaisant à la condition imposée à l'extrémité $x = 0$.

Des intégrales successives naissent alternativement ainsi aux deux extrémités. Si le tube qui renferme le gaz est indéfini, dans le sens des x négatifs, le piston sera toujours soumis à la pression de la tranche extrême, quel que soit son déplacement. Son mouvement sera donné, entre les instants zéro et t_2 , par l'intégrale u_1 ; entre les instants t_2 et t_4 , par l'intégrale u_3 , et ainsi de suite, mais jamais par les intégrales u_2, u_4, \dots , qui prennent naissance à l'extrémité $x = \lambda$. Pour déterminer entièrement le mouvement, il faudrait connaître toute la série des intégrales.

Mais, dans le problème d'artillerie que Lagrange et Piobert se proposaient de résoudre, le tube avait une longueur finie, laquelle n'était autre que celle de l'âme du canon. Soit L cette longueur. Quand le projectile a parcouru la longueur $L - \lambda$, il se trouve à l'extérieur du tube; le gaz se répand dans l'atmosphère et la pression exercée à l'arrière du mobile devient rapidement négligeable, de sorte que, en faisant abstraction de la pesanteur et de la résistance de l'air, son mouvement serait sensiblement uniforme.

Soit u_{2n+1} l'intégrale qui représente le mouvement du projectile au moment où son déplacement est égal à $L - \lambda$; il est complètement inutile de déterminer les intégrales ultérieures, de sorte que le problème peut être résolu par la détermination d'un nombre fini d'intégrales.

Lorsqu'on veut tenir compte du déplacement du canon, comme l'a tenté Piobert, le problème devient encore plus complexe. Soit M , la masse du canon, le frottement du gaz contre son enveloppe étant négligé; le mouvement du canon est produit par la pression de la tranche extrême dont l'abscisse est λ . La condition $u = 0$, imposée à cette extrémité, doit donc être remplacée par la suivante

$$M, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega p,$$

pour $x = \lambda$, quel que soit t .

Au début, une intégrale prend naissance à chaque extrémité. Soient u_1 et u'_1 ces deux intégrales, toutes deux compatibles avec le repos et satisfaisant, l'une à la condition imposée à l'extrémité $x = 0$, l'autre à la condition imposée à l'extrémité λ .

Les deux intégrales u_1 et u'_1 se propagent dans la colonne, en sens contraires, avec la même vitesse a , et se rencontrent en son milieu à l'instant $t_1 = \frac{\lambda}{2a}$. En ce point se développe alors une nouvelle intégrale u_2 , compatible avec les précédentes et qui se propage à leurs dépens, de sorte qu'elle arrive à l'extrémité $x = 0$ au bout d'un temps t_2 et à l'extrémité λ à l'instant t'_2 .

A l'instant t_2 , une nouvelle intégrale u_3 prend naissance à l'extrémité $x = 0$; de même, à l'instant t'_2 , une intégrale u'_3 à l'extrémité λ . Elles se propagent dans u_2 et finissent par se rencontrer en un point de la colonne où se développe une intégrale u_4 et ainsi de suite.

Le mouvement du projectile M est représenté successivement par les intégrales u_1, u_2, \dots , celui du canon par les intégrales u'_1, u'_2, \dots . Comme dans le cas précédent, il suffit de déterminer ces intégrales jusqu'au moment où le projectile sort du canon.

133. Il ne s'agit pas ici de résoudre complètement ce problème; on va seulement déterminer le mouvement du mobile M , pendant le temps où il est représenté par la première intégrale. On supposera, pour commencer, que l'extrémité λ est inébranlable.

La condition imposée à l'extrémité $x = 0$ étant

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega p,$$

en remarquant que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\nu}{dt}, \quad p = p_0(1+z)^{-m},$$

peut s'écrire

$$M \frac{d\nu}{dt} = -\omega p_0(1+z)^{-m},$$

ν désignant la vitesse du mobile et z la dilatation de la tranche extrême.

L'intégrale qui prend naissance au contact du piston, étant compatible avec le repos, est représentée géométriquement par une surface développable, et il existe, entre la vitesse ν et la dilatation z d'une tranche, la relation

$$1+z = \left(1 + \frac{m-1}{2a} \nu\right)^{-\frac{2}{m-1}},$$

par suite de laquelle l'équation précédente devient

$$M \frac{d\nu}{dt} = -\omega p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} \nu\right)^{\frac{2m}{m-1}}.$$

C'est l'équation différentielle du mouvement du piston. La force qui le sollicite est ainsi une fonction de sa vitesse.

Intégrant et remarquant que la vitesse ν est nulle pour $t = 0$, on obtient

$$\left(1 + \frac{m-1}{2a} \nu\right)^{-\frac{m+1}{m-1}} = \frac{m+1}{2aM} \omega p_0 t + 1$$

ou

$$\nu = -\frac{2a}{m-1} \left[1 - \left(1 + \frac{m+1}{2aM} \omega p_0 t\right)^{-\frac{m-1}{m+1}}\right].$$

Cette formule détermine la vitesse du piston tant qu'elle est représentée par la première intégrale. Or celle-ci représente le mouvement du piston,

tant que l'intégrale u_2 , qui prend naissance à l'extrémité λ par la réflexion de la première, n'est pas parvenue à l'origine.

La première intégrale arrive à l'extrémité λ au bout d'un temps $\frac{\lambda}{a}$, puisqu'elle se propage avec une vitesse a . L'intégrale u_2 , qui prend naissance à l'extrémité λ , se propage en sens contraire, avec une vitesse variable $a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}$: cette vitesse est inférieure à a ; car z est positif, ainsi qu'il est facile de le reconnaître, pour tous les points du gaz où la première intégrale est applicable.

Ainsi la formule précédente représente le mouvement du piston pendant un temps supérieur à $\frac{2\lambda}{a}$ qu'on pourrait, du reste, calculer exactement par la seule considération de la première intégrale, car il suffirait de déterminer la projection horizontale de la caractéristique du deuxième système qui passe par le point dont les coordonnées sont $t = \frac{\lambda}{a}$, $x = \lambda$.

134. On obtiendrait sans difficulté l'expression analytique de l'intégrale ; mais elle ne serait d'aucune utilité pour déterminer à chaque instant les vitesses ou les dilatations des différentes tranches du gaz. Il est plus commode de construire par points les courbes qui les représentent, en s'appuyant sur ce que les vitesses ou les dilatations développées dans la tranche extrême $x = 0$ se propagent sans altération avec une vitesse constante dont la valeur, correspondant à une dilatation z , est $a(1+z)^{-\frac{m+1}{2}}$.

Pour chaque instant t , compris entre zéro et $\frac{\lambda}{a}$, le gaz est divisé par la tranche d'abscisse $\xi = at$ en deux parties ; l'une est encore en repos, tandis que le mouvement de l'autre partie est représenté par l'intégrale développable.

Dans cette dernière partie, les vitesses sont toutes négatives et les dilatations positives. L'ordonnée de la courbe des vitesses ou celle de la courbe des dilatations diminue régulièrement en valeur absolue, à mesure que l'abscisse croît. Chacune des courbes se déforme avec le temps de manière que, pour un point d'ordonnée déterminée, le coefficient angu-

laire de la tangente décroisse constamment en valeur absolue. Il en résulte que, même si la longueur λ était infinie, l'arête de rebroussement de la surface développable ne pourrait être atteinte par le mouvement. Tous ses points correspondent à des valeurs négatives de t .

Pour chaque instant compris entre $\frac{\lambda}{a}$ et $\frac{2\lambda}{a}$, la colonne gazeuse est encore divisée en deux parties par un point qui s'éloigne de plus en plus de λ . Dans la partie la plus rapprochée de l'origine, le mouvement est représenté par l'intégrale développable; dans l'autre partie, il est donné par l'intégrale u_2 qui, à l'instant $\frac{\lambda}{a}$, a pris naissance à l'extrémité λ .

135. Revenant au mouvement du mobile, on voit que sa vitesse, nulle à l'origine, se montre constamment croissante en valeur absolue, avec le temps. Si la longueur λ de la colonne est infinie et si le tuyau est indéfini du côté des x négatifs, de sorte que le gaz ne puisse jamais se répandre au dehors, quel que soit le déplacement du piston, la vitesse est toujours représentée par la formule du n° 133, quelque grand que soit le temps t .

Quand ce dernier augmente indéfiniment, la vitesse du mobile converge vers la limite

$$-\frac{2a}{m-1},$$

qui a déjà été rencontrée plusieurs fois. Cette limite est, comme on voit, indépendante du poids du mobile. Seulement, la vitesse se rapproche d'autant plus vite de cette limite, que la masse M est plus petite.

Soient M et M' les masses de deux pistons différents. La formule montre que les vitesses imprimées par un même gaz à ces deux mobiles seraient les mêmes à des instants t et t' tels que

$$\frac{t}{t'} = \frac{M}{M'}.$$

Les temps auxquels correspondent des vitesses égales sont donc proportionnels aux masses des pistons.

On obtient aisément le déplacement du piston à un instant quelconque. Soit u ce déplacement : on a

$$u = \frac{2 a^2 M}{(m-1) \omega p_0} \left[\left(1 + \frac{m+1}{2 a M} \omega p_0 t \right)^{\frac{2}{m+1}} - 1 \right] - \frac{2 a t}{m-1};$$

Il est clair que la vitesse imprimée au piston par une colonne gazeuse de longueur λ , dont la pression est p_0 et la densité ρ_0 , ne peut décroître lorsque λ augmente. Or la limite vers laquelle converge cette vitesse, quand λ est infini, est $\frac{2a}{m-1}$. Cette quantité représente, par suite, la plus forte vitesse que le gaz puisse imprimer à un mobile.

Les résultats précédents peuvent être généralisés et étendus à un fluide quelconque, dont la conductibilité est négligeable; mais l'examen de ce cas plus général entraînerait dans trop de longueurs. On se bornera à énoncer le théorème suivant, qu'il serait facile de démontrer :

Quand un fluide non conducteur renfermé dans un cylindre est limité par une base inébranlable, et qu'à l'autre extrémité de la colonne se trouve un piston qui peut se déplacer sans frottement, dans le tuyau supposé indéfiniment prolongé, le fluide communique au piston une vitesse graduellement croissante, mais qui ne peut dépasser une certaine limite, dépendant de la nature du fluide et de son état initial, mais indépendante de la masse du piston.

Lorsque, par exemple, on emploie, pour mettre en mouvement un projectile, une certaine charge de poudre à canon, il est clair que la vitesse imprimée au projectile, au moment où il sort de la bouche à feu, ne pourrait qu'être augmentée, si l'on réduisait à son minimum le volume initial occupé par la charge et si cette dernière était entièrement brûlée avant tout déplacement du boulet. Elle augmenterait encore si l'on faisait disparaître le frottement et si l'âme du canon était prolongée indéfiniment. Malgré tout, il existe une limite que la vitesse du projectile ne peut jamais dépasser.

Si la poudre à canon était remplacée dans le canon par un explosif d'une

autre nature, la limite serait différente, mais elle n'en existerait pas moins.

136. Les choses se passent d'une manière bien différente quand les différentes tranches du fluide en mouvement peuvent recevoir de la chaleur du dehors. Si le fluide est un gaz parfait et si l'enveloppe agit comme source de chaleur, pour le maintenir constamment à la même température, la détente s'effectue suivant la loi de Mariotte, de sorte qu'on a, pour l'intégrale développable, la relation

$$1 + z = e^{-\frac{v}{a}},$$

entre la dilatation z et la vitesse v d'une tranche.

L'équation du mouvement du piston étant

$$M \frac{dv}{dt} = -\omega p,$$

on a

$$p = p_0(1 + z)^{-1} = p_0 e^{-\frac{v}{a}},$$

de sorte que cette équation devient

$$M \frac{dv}{dt} = -\omega p_0 e^{-\frac{v}{a}}.$$

Intégrant et remarquant que la vitesse s'annule pour $t = 0$, on obtient

$$v = -a \log \left(1 + \frac{\omega p_0}{Ma} t \right).$$

Si la longueur initiale λ de la colonne est infinie, auquel cas l'intégrale est applicable pour toutes les valeurs du temps, on voit que la vitesse v , nulle pour $t = 0$, est toujours négative et augmente indéfiniment avec t . Ainsi, dans ce cas, la vitesse croît au delà de toute limite.

137. Si, outre la pression du gaz, le mobile était soumis à l'action d'une force déterminée F , parallèle aux génératrices du tuyau, l'équation diffé-

entielle de son mouvement serait

$$M \frac{dv}{dt} = -\omega p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}} + F;$$

il faudrait l'intégrer pour obtenir la loi du mouvement.

Si, par exemple, la force F est constante, ce qui arrive quand on tient compte du frottement, supposé indépendant de la vitesse, ou quand, le cylindre étant incliné, il y a lieu d'avoir égard à l'action de la pesanteur, on trouve

$$t = \int_0^v \frac{M dv}{F - \omega p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}}}.$$

138. On a supposé, jusqu'à présent, que le vide absolu existait à l'arrière du piston. Cette condition n'est pas réalisable dans la pratique. Quand il s'agit d'un canon, par exemple, le projectile subit à l'avant la pression de l'air qui se trouve dans le tube, et l'on peut chercher à tenir compte de cette circonstance.

Il faut, pour cela, modifier les conditions du problème et supposer que le piston se trouve placé entre deux colonnes gazeuses, l'une se trouvant du côté des x positifs, l'autre du côté opposé.

Dans ces conditions, l'équation du mouvement sera

$$\frac{M}{\omega} \frac{dv}{dt} = p' - p,$$

p et p' désignant les pressions correspondant aux tranches extrêmes des deux gaz.

Les intégrales qui prennent naissance dans les deux colonnes sont toutes deux développables; pour le premier gaz, on a, comme précédemment,

$$p = p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v\right)^{\frac{2m}{m-1}}.$$

Pour le deuxième gaz, on trouverait de même, sans difficulté,

$$p' = p'_0 \left(1 - \frac{m'-1}{2a'} v\right)^{\frac{2m'}{m'-1}}.$$

L'équation du mouvement du piston est ainsi

$$\frac{M}{\omega} \frac{dv}{dt} = p'_0 \left(1 - \frac{m'-1}{2a'} v \right)^{\frac{2m'}{m'-1}} - p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} v \right)^{\frac{2m}{m-1}}.$$

L'intégration s'effectue par une simple quadrature.

Enfin on peut encore remarquer que, si la tranche extrême λ du cylindre n'est pas inébranlable, mais qu'elle soit, comme l'autre, limitée par un piston de masse M_1 , on peut obtenir le mouvement de ce dernier, comme celui du piston de masse M , qui se trouve à l'extrémité $x = 0$. On a en effet, v désignant la vitesse du piston et z la dilatation de la tranche λ ,

$$M_1 \frac{dv}{dt} = \omega p, \quad p = p_0 (1 + z)^{-m}.$$

D'ailleurs l'intégrale qui prend naissance à l'extrémité λ est développable, et l'on voit aisément que

$$1 + z = \left(1 - \frac{m-1}{2a} v \right)^{-\frac{2}{m-1}}.$$

L'équation du mouvement devient ainsi

$$M_1 \frac{dv}{dt} = \omega p_0 \left(1 - \frac{m-1}{2a} v \right)^{\frac{2m}{m-1}},$$

et l'on intégrerait comme précédemment. On aurait, par suite, les mouvements des deux pistons M et M_1 , mais les formules ne seraient plus applicables ici que pendant un temps un peu supérieur à $\frac{\lambda}{a}$.

Les conditions précédentes sont celles où s'était placé Piobert. On voit que son problème se résout sans difficulté et avec une certaine rigueur pour les premiers instants du mouvement. Les intégrales suivantes sont beaucoup plus complexes; le cadre de ce travail ne permet pas d'indiquer comment on doit les déterminer.

CHAPITRE V.

SUR LES DISCONTINUITÉS QUI SE MANIFESTENT DANS LA PROPAGATION DU MOUVEMENT.

I. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

139. La propagation du mouvement dans un corps donne lieu à des discontinuités quand, dans un temps infiniment petit, la vitesse ou la dilatation d'une tranche subit une variation finie ou quand, à un instant donné, la vitesse ou la dilatation de deux tranches infiniment voisines diffèrent d'une quantité finie.

Les discontinuités peuvent être introduites de plusieurs manières différentes :

1° Elles peuvent préexister dans l'état initial. C'est un cas qu'on ne considérera jamais dans ce qui va suivre.

2° Elles peuvent être introduites dans les conditions imposées aux extrémités. Si, par exemple, un solide prismatique élastique est heurté à son extrémité par un corps animé d'une vitesse finie V , la tranche extrême, d'abord en repos, acquiert brusquement cette vitesse V , tandis que la tranche infiniment voisine est encore en repos.

3° Dans les deux cas que l'on vient de signaler, il n'est pas étonnant que l'on rencontre une discontinuité dans le mouvement, attendu qu'on l'a introduite dans les conditions limites. Mais on a pu voir, dans le Chapitre précédent, que, pour certains corps, des discontinuités peuvent prendre naissance dans le mouvement, même lorsque les conditions initiales et celles qui sont imposées aux extrémités sont parfaitement continues. Ces discontinuités, qui sont de beaucoup les plus curieuses, résultent de la forme particulière de l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement.

On peut se demander si les discontinuités que l'on rencontre dans la théorie de la propagation du mouvement sont une simple fiction analytique,

ou bien si elles correspondent à une réalité physique. C'est une question à laquelle il est bien difficile de répondre dans l'état actuel de la Science.

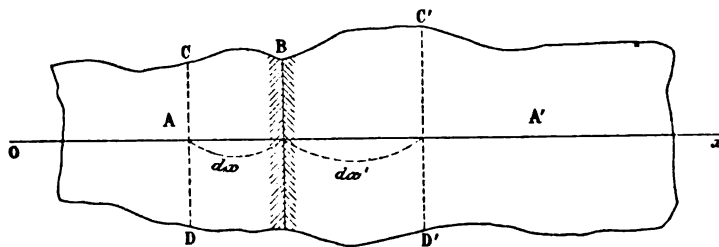
S'il ne s'agissait que des discontinuités introduites par les conditions imposées aux extrémités, la réponse ne serait pas douteuse. La forme analytique discontinue que l'on donne à ces conditions ne correspond pas à la réalité des faits. Ainsi, dans l'exemple cité du choc d'un corps contre l'extrémité d'une barre élastique, l'action du corps sur cette extrémité commence avant que le contact soit établi, par suite de l'action qu'exercent à distance les dernières particules matérielles. Cette action, d'abord négligeable, croît très rapidement quand la distance du corps et de la barre devient extrêmement faible et l'extrémité de cette barre n'atteint la vitesse V qu'après avoir passé successivement par toutes les vitesses intermédiaires. A une variation très rapide de cette vitesse, dont la loi est d'ailleurs inconnue, on substitue, pour simplifier, l'hypothèse d'une variation brusque.

Il est beaucoup plus difficile de se prononcer quand, les conditions imposées aux extrémités étant continues, ainsi que l'état initial, on voit dans la propagation du mouvement une discontinuité prendre brusquement naissance; il semble même, au premier abord, que cette discontinuité doive effectivement se produire dans la réalité. Toutefois il faut remarquer que les équations aux dérivées partielles, dont on fait usage pour étudier le mouvement, ne sont basées que sur des hypothèses très voisines, il est vrai, de la réalité, mais qui, remplacées par les lois véritables, conduiraient néanmoins à des équations tout autres. C'est ainsi que, pour établir l'équation du mouvement des gaz, on a supposé que la conductibilité propre du fluide était rigoureusement nulle. Or, il est bien connu que cette conductibilité, tout en étant très faible, n'en a pas moins une valeur sensible; l'équation aux dérivées partielles, dont on a fait usage, n'est donc qu'une approximation.

Quoi qu'il en soit, les discontinuités s'introduisent forcément dans les problèmes de Physique mathématique. Qu'on les considère comme ayant une existence réelle ou qu'on les admette comme une simple approximation, il est indispensable d'examiner l'influence qu'elles exercent sur les phénomènes de la propagation du mouvement.

140. Pour plus de généralité, on considérera deux corps A et A', animés de mouvements par tranches perpendiculairement à une droite Ox. Les deux corps sont assujettis à rester en contact suivant un plan B perpendiculaire à Ox. Chacun des corps est animé d'un mouvement représenté par une intégrale d'une certaine équation aux dérivées partielles du

Fig. 11.



second ordre. A l'instant considéré, la vitesse et la pression ne sont pas les mêmes dans les tranches en contact. Il s'agit d'analyser le phénomène qui se produira dans le voisinage de la section commune B.

Soient, pour le corps A, v la vitesse, z la dilatation et p la pression de la tranche en contact avec A', v' , z' et p' les quantités correspondantes pour la tranche du corps A' qui est en contact avec A.

Par suite de la réaction que les tranches en contact exercent l'une sur l'autre, leur état va se trouver modifié, de sorte qu'au bout du temps dt une certaine portion du corps A, de longueur dx , aura pris la vitesse v_1 , la dilatation z_1 et la pression p_1 .

De même, à cet instant dt , une certaine portion du corps A' de longueur dx' aura pris une vitesse v'_1 , une dilatation z'_1 et une pression p'_1 .

Il s'agit de déterminer les six quantités v_1 , v'_1 , z_1 , z'_1 , p_1 , p'_1 et en outre les longueurs dx et dx' , ou plutôt les rapports $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$. Il existe ainsi huit inconnues et le problème consiste à rechercher les huit équations nécessaires pour les déterminer.

141. Les deux corps étant assujettis à rester en contact, il en résulte que les vitesses des deux tranches en contact doivent être constamment les mêmes, de sorte que si, à un moment donné, il existe entre elles une dif-

férence finie, cette différence doit disparaître instantanément. On a ainsi une première équation

$$(1) \quad v_1 = v'_1.$$

Mais, pour que cette égalité subsiste, il est nécessaire que les pressions des tranches en contact soient aussi constamment égales, par suite

$$(2) \quad p_1 = p'_1.$$

Appliquant maintenant le théorème des quantités de mouvement à la tranche dx du corps A, on voit que l'accroissement de sa quantité de mouvement, pendant le temps dt , est $\rho_0 \omega dx(v_1 - v)$, ρ_0 désignant la densité initiale de la tranche, et ω sa section. L'impulsion élémentaire des pressions exercées sur les bases est évidemment $\omega dt(p - p_1)$, car la section de contact est soumise, pendant le temps dt , à la pression p_1 , tandis que sur l'autre s'exerce la pression p . L'impulsion élémentaire des forces extérieures, ainsi que celle qui correspond au frottement et à la viscosité, est infiniment petite par rapport à la précédente : ainsi

$$(3) \quad \rho_0(v_1 - v) \frac{dx}{dt} = p - p_1.$$

On trouve de même, en considérant la tranche dx' du corps A',

$$(4) \quad \rho'_0(v'_1 - v') \frac{dx'}{dt} = p'_1 - p'.$$

L'une des bases de la tranche dx est animée pendant le temps dt de la vitesse v , l'autre de la vitesse v_1 ; elle subit par suite, pendant ce temps, un accroissement de longueur égal à $(v_1 - v) dt$. La longueur primitive était $dx(1 + z)$; à la fin du temps dt , elle est représentée par $dx(1 + z_1)$; on a donc

$$(5) \quad (z_1 - z) \frac{dx}{dt} = v_1 - v.$$

On trouverait de même, en considérant la tranche dx' ,

$$(6) \quad (z'_1 - z') \frac{dx'}{dt} = v' - v'_1.$$

II. — CAS OÙ LA RELATION ENTRE LA PRESSION ET LA DENSITÉ
EST INDÉPENDANTE DES TRANSFORMATIONS SUBIES PAR LE CORPS.

141. Les six équations que l'on vient d'obtenir sont absolument indépendantes de la nature des corps; mais il n'en est pas de même pour les deux dernières, qui doivent achever la détermination des inconnues. Deux cas bien différents sont à distinguer.

Il peut arriver que, pour les deux corps, la pression soit liée à la dilatation par une relation invariable, indépendante de la transformation que le corps a subie et qui ne soit pas altérée lors même que les vitesses éprouvent, à certains instants, des variations brusques. Les deux dernières équations s'obtiennent alors immédiatement. Soient, en effet, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ les fonctions de la dilatation qui représentent la pression dans chacun des corps : on a

$$(7) \quad p_1 = \varphi(z_1),$$

$$(8) \quad p'_1 = \psi(z'_1),$$

et le problème est complètement déterminé.

Parmi les corps dont le mouvement a été étudié dans le Chapitre III, il en est un certain nombre pour lesquels les relations précédentes sont applicables. D'abord les solides élastiques, pour lesquels la pression s'obtient toujours en multipliant la dilatation z , prise avec un signe contraire, par le coefficient d'élasticité E , de sorte que

$$p = -Ez,$$

relation indépendante des transformations subies antérieurement par le corps.

Il en est de même pour un gaz satisfaisant à la loi de Mariotte, dont la température demeure par suite constante pendant toute la durée du mouvement. Dans ce cas,

$$p = p_0(1 + z)^{-1}.$$

L'enveloppe du gaz est alors supposée agir comme une source de chaleur parfaite, de manière à maintenir invariable la température de chaque tranche.

Mais, comme on le verra bientôt, les choses se passent d'une manière toute différente quand il s'agit d'un gaz dont les tranches ne peuvent recevoir de chaleur, ni de l'enveloppe ni des tranches voisines.

142. Considérant toujours le cas où la relation qui existe entre la pression et la dilatation est indépendante des transformations antérieures, on supposera que les deux corps juxtaposés sont identiques, ce qui ne peut empêcher la théorie précédente d'être applicable. Les deux fonctions φ et ψ sont alors les mêmes; et, puisque $p_1 = p'_1$, les équations (7) et (8) donnent

$$z'_1 = z_1.$$

Les équations (3) et (4) deviennent d'ailleurs, en remarquant que $\rho_0 = \rho'_0$,

$$\rho_0(v_1 - v) \frac{dx}{dt} = \varphi(z) - \varphi(z_1),$$

$$\rho_0(v_1 - v') \frac{dx'}{dt} = \varphi(z_1) - \varphi(z').$$

Quant aux équations (5) et (6), elles donnent

$$(z_1 - z) \frac{dx}{dt} = v_1 - v,$$

$$(z_1 - z') \frac{dx'}{dt} = v' - v_1.$$

Ces équations renferment quatre inconnues seulement, v_1 , z_1 , $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$.

On peut chercher la condition pour que l'une des vitesses de propagation, $\frac{dx'}{dt}$ par exemple, s'annule. On doit avoir d'abord

$$(9) \quad v_1 = v',$$

$$(10) \quad \varphi(z_1) = \varphi(z');$$

d'où

$$z_1 = z'.$$

Substituant ces valeurs de v , et z , dans les deux autres équations et divisant membre à membre, on obtient la condition cherchée

$$(11) \quad \rho_0(v' - v)^2 = [\varphi(z) - \varphi(z')](z' - z).$$

Quand elle est satisfaite, le phénomène est beaucoup plus simple que dans le cas ordinaire.

143. Lorsque l'équation (11) n'est pas satisfaite, les deux tranches de longueur dx et dx' qui ont pris des vitesses égales, et par suite des pressions égales, sont animées du même mouvement. Le corps se trouve ainsi, à l'instant dt , partagé en trois parties : l'une, à gauche de CD , est animée d'un mouvement représenté par une certaine intégrale de l'équation aux dérivées partielles, qui, d'ailleurs, est connue à l'avance; de même, la portion à droite de $C'D'$ est représentée par une autre intégrale également connue. Entre les deux, se trouve une partie de longueur infiniment petite $dx + dx'$, dans laquelle la vitesse est v , et la dilatation z . La vitesse et la dilatation présentent ainsi des discontinuités brusques dans les sections CD et $C'D'$; la discontinuité primitive, qui avait lieu dans la section B , a donné naissance à deux autres discontinuités.

Mais, quand l'une des quantités $\frac{dx}{dt}$ ou $\frac{dx'}{dt}$ est nulle, la portion intermédiaire $CDC'D'$ disparaît. La discontinuité primitive n'a fait que changer de place et tout le mouvement du corps est encore représenté par deux intégrales uniques, comme à l'instant zéro, ces deux intégrales laissant d'ailleurs subsister au point commun une discontinuité dans les vitesses et les dilatations.

Ainsi, quand la condition (11) est satisfaite, les deux intégrales qui représentaient seules le mouvement du corps à l'instant initial le représentent encore à l'instant dt . Seulement le point commun aux deux intégrales s'est déplacé de dx , c'est-à-dire que l'une des intégrales s'est *propagée* dans l'autre avec une vitesse $\frac{dx}{dt}$, sans donner naissance à aucun phénomène nouveau. Quand il en est ainsi, on dira que les deux intégrales sont *compatibles* entre elles.

La notion de compatibilité se trouve ainsi étendue au cas où, pour le point commun aux deux intégrales, la vitesse et la dilatation présentent une discontinuité.

Pour que deux intégrales u et u' de l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement du corps soient compatibles entre elles, il faut que la condition (11) soit toujours satisfaite pour les valeurs v, v', z et z' qui correspondent aux deux tranches en contact. La section de contact n'est pas difficile à déterminer, car, le déplacement devant être le même pour les deux tranches, on a pour les tranches en contact

$$u = u',$$

équation qui, pour chaque valeur de t , détermine l'abscisse de la section commune aux deux intégrales.

144. La condition de compatibilité peut encore être mise sous une autre forme. Multipliant membre à membre les équations qui renferment $\frac{dx}{dt}$, après qu'on a remplacé z , par z' et v , par v' , on obtient

$$(12) \quad \rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\varphi(z) - \varphi(z')}{z' - z}.$$

Pour que les intégrales soient compatibles, il faut que la valeur de $\frac{dx}{dt}$, obtenue en différentiant l'équation $u - u' = 0$, où l'on considère x comme fonction de t , satisfasse à l'équation (12) pour toutes les valeurs de t .

Cette équation (12) peut d'ailleurs s'écrire

$$\rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{p - p'}{z' - z};$$

sous les deux formes, elle fournit la valeur de la vitesse de propagation d'une intégrale dans l'autre.

145. Quand les intégrales compatibles sont telles que, pour le point commun, la vitesse et la dilatation soient constamment égales, c'est-à-dire

quand les deux surfaces intégrales correspondantes se raccordent tout le long de la ligne d'intersection, cette dernière constitue, ainsi qu'on l'a démontré dans le Chapitre III, une caractéristique commune aux deux surfaces, de sorte que sa projection horizontale est déterminée à l'avance quand on connaît l'une seulement des deux surfaces. En d'autres termes, il suffit alors de connaître l'une des intégrales pour connaître la vitesse de propagation.

Mais il n'en est pas de même quand il existe, pour le point commun aux deux intégrales compatibles, une discontinuité dans les vitesses et les dilatations. L'équation (12) montre qu'alors la vitesse de propagation $\frac{dx}{dt}$ dépend à la fois des deux intégrales, puisque les valeurs des dilatations z et z' , qui leur correspondent, y entrent également. Les surfaces représentatives se coupent alors suivant une courbe qui dépend à la fois des deux surfaces et qui n'est plus connue quand une seule de ces surfaces est donnée. Ces courbes, dont l'étude ne peut être entreprise ici, doivent être regardées comme la généralisation des caractéristiques.

On vérifie sans difficulté que, si la discontinuité qui existe dans les dilatations pour le point commun aux deux intégrales converge vers zéro, la courbe d'intersection se rapproche de plus en plus de la caractéristique. Si, en effet, dans l'équation (12), on remplace z' par $z + \delta z$, elle devient

$$\rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\varphi(z) - \varphi(z + \delta z)}{\delta z} = -\varphi'(z).$$

Or, la pression étant représentée par $\varphi(z)$, les termes qui, dans l'équation aux dérivées partielles, sont affectés des dérivées du second ordre, sont

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varphi'(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La valeur de $\frac{dx}{dt}$ est donc bien le coefficient angulaire de la tangente à la projection horizontale de la caractéristique.

146. Il est un cas toutefois où la vitesse de propagation n'est pas modi-

fiée par la présence des discontinuités : c'est celui où, dans l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement, les coefficients des dérivées du second ordre sont indépendants des dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial x} = z$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = v$.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et il suffit que la fonction $\varphi(z)$, qui représente la pression, soit égale à Az , A désignant une quantité qui peut dépendre de x , t et u .

En effet, dans ce cas, les termes affectés des dérivées du second ordre dans l'équation aux dérivées partielles sont

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et, dans le cas où il n'existe pas de discontinuité, la vitesse de propagation est donnée par

$$\rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -A.$$

Dans le cas contraire, il faut recourir à l'équation (12); mais elle devient alors

$$\rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{Az - Az'}{z' - z} = -A,$$

puisque les valeurs de A sont les mêmes pour les deux intégrales.

L'expression de la vitesse de propagation est donc la même, qu'il existe ou non des discontinuités pour le point commun aux deux intégrales.

On connaît alors la vitesse de propagation dans une intégrale donnée pour tous les cas possibles de compatibilité, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'intégrale qui se propage.

C'est ce qui a lieu, en particulier, lorsque, dans l'équation aux dérivées partielles, les dérivées du second ordre ont des coefficients dépendant uniquement de x ; la vitesse de propagation ne dépend même plus alors de l'intégrale que l'on considère; elle est uniquement fonction de l'abscisse x de la tranche.

Supposant l'équation aux dérivées partielles absolument linéaire, comme celle qui régit le mouvement par tranches d'un solide élastique, on voit,

d'après ce qui précède, que deux surfaces intégrales se coupant suivant une caractéristique représentent deux mouvements compatibles. Ce résultat est d'accord avec ceux qui ont été obtenus dans le Chapitre I, où l'on a montré que deux surfaces intégrales d'une équation linéaire se coupant suivant une caractéristique peuvent, à certains points de vue, être regardées comme constituant une seule et unique surface intégrale.

147. Il reste à examiner ce qui arrive quand les deux intégrales, qui représentent à un instant donné le mouvement du corps et qui présentent une discontinuité au point commun, ne sont pas compatibles entre elles. On a vu que, dans un instant dt , une tranche s'étendant, de part et d'autre de la section commune, à des distances dx et dx' , se trouvait animée d'une vitesse v , et d'une dilatation z , de sorte que, au lieu d'une seule section de discontinuité, on en rencontrait deux, savoir celles qui limitent la tranche de longueur $dx + dx'$.

Le mouvement de cette tranche de longueur $dx + dx'$ est évidemment, puisqu'il n'existe pas de discontinuité dans les vitesses et les dilatations de la tranche, représenté par une nouvelle intégrale de l'équation qui régit le mouvement; seulement cette intégrale ne s'étend, à l'instant considéré, que sur une longueur infiniment petite.

Or il est facile de voir que cette nouvelle intégrale est compatible avec les deux intégrales primitives, car les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ satisfont aux équations suivantes, que l'on déduit sans peine des équations du n° 142 :

$$\rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z_1 - z},$$

$$\rho_0 \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 = \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z')}{z' - z_1};$$

ce sont précisément les conditions de compatibilité.

La nouvelle intégrale va donc purement et simplement se propager dans les deux premières sans donner naissance à aucun phénomène nouveau.

148. L'analyse précédente montre que, si, dans un corps, la relation

entre la pression et la dilatation d'une tranche est indépendante des transformations subies par cette tranche, le mécanisme de la propagation du mouvement est le même, qu'il y ait ou non des discontinuités.

Quand deux intégrales ont un point commun, il peut arriver qu'elles soient compatibles; alors l'une d'entre elles se propage et s'étend aux dépens de l'autre sans donner naissance à aucun phénomène nouveau.

Lorsque ces deux intégrales ne sont pas compatibles, une nouvelle intégrale prend naissance au point commun; elle est définie par la condition d'être compatible avec les deux premières, dans lesquelles elle se propage en s'étendant à leurs dépens.

Le corps étant animé d'un mouvement, représenté par une intégrale donnée, si l'on impose à son extrémité une certaine condition, il prend naissance, à cette extrémité, une nouvelle intégrale compatible avec la première et satisfaisant à la condition, que celle-ci introduise ou non des discontinuités.

Mais, quand il existe des discontinuités au point commun à deux intégrales compatibles, la vitesse de propagation est généralement modifiée; de plus on ne peut plus définir les intégrales compatibles celles qui admettent une caractéristique commune.

Toutefois, il y a exception dans le cas où les coefficients des dérivées du second ordre sont indépendants de u et de ses dérivées premières; la définition des intégrales compatibles, donnée pour le cas où il n'existe pas de discontinuités, est encore applicable quand même celles-ci se manifestent.

C'est ainsi que, pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui régit le mouvement d'un cylindre solide élastique, la condition nécessaire et suffisante pour que deux intégrales soient compatibles est qu'elles aient l'une des fonctions arbitraires commune, qu'il y ait ou non des discontinuités.

III. — CAS OÙ LA RELATION ENTRE LA PRESSION ET LA DENSITÉ DÉPEND DES TRANSFORMATIONS SUBIES PAR LE CORPS.

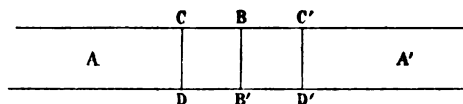
149. Dans la plupart des corps qui ont été considérés dans les Chapitres précédents, la relation qui existe entre la pression et la dilatation d'une tranche ne peut être regardée comme indépendante des transformations qu'elle a subies.

Afin de simplifier l'exposition, on ne s'occupera, dans ce qui va suivre, que des gaz parfaits supposés renfermés dans un tuyau cylindrique; mais il est facile de généraliser la théorie et de l'appliquer à tous les fluides non conducteurs, à condition de regarder l'enveloppe comme imperméable à la chaleur.

On sait que, dans toute transformation subie par un élément de masse d'un gaz sans gain ni perte de chaleur, le travail des forces extérieures est égal à l'augmentation de l'énergie totale, c'est-à-dire de la somme de l'énergie interne et de la force vive.

Considérons donc deux colonnes gazeuses A et A', juxtaposées à l'instant t dans un tuyau cylindrique, de manière à se toucher par la section BB' où les vitesses v et v' , les dilatations z et z' et les pressions p et p' sont différentes.

Fig. 12.



A l'instant $t + dt$, les deux tranches en contact, dont les longueurs sont dx et dx' , auront pris des vitesses v_1 et v'_1 , des dilatations z_1 et z'_1 et des pressions p_1 et p'_1 . Il s'agit de déterminer les huit inconnues $v_1, v'_1, z_1, z'_1, p_1, p'_1, \frac{dx}{dt}, \frac{dx'}{dt}$.

Les six équations du n° 140 sont applicables, mais il reste à trouver les deux dernières.

A cet effet, on exprimera que, pour chacune des tranches, la variation d'énergie totale est égale au travail des forces extérieures.

Prenant en particulier la tranche CDB'B de longueur dx et de masse $\rho_0 \omega dx$, l'énergie totale à l'instant t est

$$\frac{\rho_0 \omega dx}{2} v^2 + \frac{p \omega dx(1+z)}{m-1};$$

elle est devenue à l'instant $t + dt$

$$\frac{\rho_0 \omega dx}{2} v_1^2 + \frac{p_1 \omega dx(1+z_1)}{m-1}.$$

Le travail des forces est évidemment

$$\omega p v dt - \omega p_1 v_1 dt,$$

car la tranche est soumise sur ses deux bases aux pressions p et p_1 . On a donc l'équation

$$(13) \quad \left[\frac{\rho_0}{2} (v_1^2 - v^2) + \frac{p_1(1+z_1) - p(1+z)}{m-1} \right] \frac{dx}{dt} = p v - p_1 v_1.$$

On trouverait de même, en considérant la tranche BB'C'D' de longueur dx' ,

$$(14) \quad \left[\frac{\rho'_0}{2} (v_1'^2 - v'^2) + \frac{p'_1(1+z'_1) - p'(1+z')}{m'-1} \right] \frac{dx'}{dt} = p'_1 v'_1 - p' v'.$$

Ces deux équations, jointes aux six déjà obtenues, déterminent complètement les inconnues.

150. On peut déduire de ces équations, pour chacune des tranches dx et dx' , la relation qui existe entre la pression, la dilatation primitive de la tranche et sa dilatation finale.

Considérant, par exemple, la tranche dx , on tire des équations (3), (5) et (13)

$$p v - p_1 v_1 = \frac{\rho_0}{2} (v_1 - v) (v_1 + v) \frac{dx}{dt} + \frac{p_1 - p}{m-1} \frac{dx}{dt} + \frac{p_1 z_1 - p z}{m-1} \frac{dx}{dt}$$

$$p v - p_1 v_1 = \frac{v_1 + v}{2} (p - p_1) + \frac{p_1 - p}{m-1} \frac{v_1 - v}{z_1 - z} + \frac{p_1 z_1 - p z}{m-1} \frac{v_1 - v}{z_1 - z};$$

d'où, en remarquant que

$$p\nu - p_1\nu_1 - \frac{p-p_1}{2}(\nu_1 + \nu) = \frac{p+p_1}{2}(\nu - \nu_1)$$

et supprimant le facteur commun $\nu - \nu_1$,

$$\frac{p+p_1}{2} + \frac{p_1-p}{m-1} \frac{1}{z_1-z} + \frac{p_1 z_1 - p z}{m-1} \frac{1}{z_1-z}.$$

Résolvant par rapport à p_1 , on trouve

$$(15) \quad p_1 = p \frac{2(1+z) - (m-1)(z_1-z)}{2(1+z) + (m+1)(z_1-z)}.$$

On trouverait de même

$$(16) \quad p'_1 = p' \frac{2(1+z') - (m'-1)(z'_1-z')}{2(1+z') + (m'+1)(z'_1-z')}.$$

Les pressions p_1 et p'_1 devant être égales, on en déduit aussi

$$(17) \quad p \frac{2(1+z) - (m-1)(z_1-z)}{2(1+z) + (m+1)(z_1-z)} = p' \frac{2(1+z') - (m'-1)(z'_1-z')}{2(1+z') + (m'+1)(z'_1-z')}.$$

131. Les résultats précédents sont encore les mêmes quand les deux gaz juxtaposés suivant la tranche BB' sont identiques. Dans ce cas $m' = m$, et l'on peut aussi prendre $\rho'_0 = \rho_0$, sauf à attribuer à la dilatation z' une valeur convenable.

Le gaz qui, à l'instant t , était divisé en deux parties par la tranche BB', est, à l'instant $t + dt$, divisé en quatre parties par les tranches CD, BB' et C'D'. Les deux parties intermédiaires ont des longueurs infiniment petites; en CD et C'D' existent des discontinuités relativement aux vitesses, aux dilatations et aux pressions; en BB' les pressions et les vitesses sont égales, mais il n'en est pas de même des dilatations.

On peut chercher la condition pour que l'une des tranches CDBB' ou BB'C'D' disparaisse, par exemple la deuxième. Il faut pour cela que $\frac{dx'}{dt}$ s'annule. L'équation (4) donne alors

$$v'_1 = v'$$

et par suite, en vertu de (1),

$$v_1 = v'.$$

L'équation (6) donne ensuite

$$p'_1 = p'$$

et par suite, en vertu de (2),

$$p_1 = p',$$

et il reste les équations

$$\rho_0(v' - v) \frac{dx}{dt} = p - p',$$

$$(z_1 - z) \frac{dx}{dt} = v' - v,$$

$$\left[\frac{\rho_0}{2} (v'^2 - v^2) + \frac{p'(1 + z_1) - p(1 + z)}{m - 1} \right] \frac{dx}{dt} = pv - p'v',$$

entre lesquelles il suffit d'éliminer $\frac{dx}{dt}$ et z_1 pour obtenir la condition cherchée.

Quand elle est remplie, le gaz se trouve, à l'instant $t + dt$, partagé en trois parties par les tranches CD et BB'. En CD existe une discontinuité pour les vitesses, les pressions et les dilatations; mais en BB' la discontinuité n'a lieu que pour les dilatations.

Dans la partie du gaz qui est à gauche de CD, il n'existe pas de discontinuité. Supposant qu'on néglige les frottements et la viscosité, le mouvement correspondant est évidemment représenté par une intégrale de l'équation

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = mp_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ou, plus généralement, par une intégrale de l'équation

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = mf(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f'(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m},$$

obtenue dans le Chapitre II et à laquelle il faut avoir recours si, à l'instant pris pour instant initial, la pression n'est pas uniforme dans la colonne.

De même, le mouvement de la colonne gazeuse à droite de BB' est représenté par une autre intégrale de la même équation.

Quant à la partie intermédiaire, son mouvement n'est représenté ni par l'une ni par l'autre. Toutefois, si la valeur de z , était égale à celle de z' , le mouvement de la partie intermédiaire serait représenté par la même intégrale que celui de la partie qui se trouve à droite de BB', attendu qu'il n'existerait plus de discontinuité suivant BB'.

Lorsqu'il en est ainsi, le gaz se trouve à l'instant $t + dt$, comme à l'instant précédent t , divisé en deux parties seulement, dont chacune est animée d'un mouvement représenté par une intégrale de l'équation ci-dessus; seulement la section de séparation, où se manifestent des discontinuités, s'est déplacée pendant le temps dt d'une longueur infiniment petite dx .

On a alors les trois équations

$$\begin{aligned}\rho_0(\nu' - \nu) \frac{dx}{dt} &= p - p', \\ (z' - z) \frac{dx}{dt} &= \nu' - \nu, \\ \left[\frac{\rho_0}{2} (\nu'^2 - \nu^2) + \frac{p'(1 + z') - p(1 + z)}{m - 1} \right] \frac{dx}{dt} &= p\nu - p'\nu',\end{aligned}$$

lesquelles ne contiennent, outre les données, que l'inconnue $\frac{dx}{dt}$. L'élimination de cette dernière fournit deux équations de condition, savoir

$$\begin{aligned}\rho_0(\nu' - \nu)^2 &= (p - p')(z' - z), \\ p' &= p \frac{2(1 + z) - (m - 1)(z' - z)}{2(1 + z) + (m + 1)(z' - z)}.\end{aligned}$$

Ces conditions étant supposées satisfaites, on a, pour déterminer $\frac{dx}{dt}$, l'équation

$$\rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{p - p'}{z' - z},$$

analogue à celle qui a été obtenue plus haut (n° 144).

152. Dans le cas particulier qu'on vient d'examiner, le corps étant divisé à l'instant t en deux parties animées chacune d'un mouvement particulier, il en est de même à l'instant $t + dt$; l'un des mouvements s'est propagé aux dépens de l'autre, sans qu'aucun phénomène nouveau ait pris naissance. On dira encore que ces deux mouvements sont *compatibles* entre eux.

Revenant maintenant au cas général où les conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites, on a vu que, pendant l'instant dt , les deux tranches dx et dx' en contact avec BB' prenaient des mouvements particuliers dont on a calculé les vitesses, les pressions et les dilatations. Or il est facile de voir que le mouvement de la tranche $CDBB'$ est compatible avec le mouvement qui existe dans la partie A du corps, car les conditions sont évidemment satisfaites. De même le mouvement qui a pris naissance dans la tranche $BB'C'D'$ est compatible avec celui qui préexistait dans la partie A' . Il en résulte qu'à l'instant suivant l'état du gaz sera encore tout à fait analogue; seulement les plans CD et $C'D'$ se seront déplacés en s'avancant, l'un vers la gauche, l'autre vers la droite.

Les mouvements qui ont pris naissance dans les deux tranches en contact avec la section primitive de discontinuité se propagent ainsi dans deux directions différentes aux dépens des mouvements primitifs.

Il ne naît plus d'ailleurs aucun mouvement nouveau dans les tranches avoisinant BB' , car les valeurs des vitesses et des pressions sont les mêmes dans cette section pour les deux nouveaux mouvements. Il est visible qu'alors, malgré l'inégalité des dilatations, les huit équations qui ont été établies plus haut sont satisfaites pour $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dx'}{dt} = 0$.

On peut donc résumer de la manière suivante le phénomène qui se passe quand deux colonnes gazeuses sont en contact par une section où les vitesses, les dilatations et les pressions sont différentes.

Il se développe, dans chacune des tranches en contact, un nouveau mouvement compatible avec celui dont était animée la colonne gazeuse correspondante. Chacun de ces mouvements se propage aux dépens du mouvement primitif, avec une certaine vitesse variable à chaque instant,

en laissant d'ailleurs subsister des discontinuités au point commun dans les vitesses, les dilatations et les pressions. Dans la tranche de contact des deux gaz, la vitesse et la pression sont constamment égales, mais les dilatations sont généralement différentes.

La vitesse de propagation d'un mouvement compatible avec un autre peut être mise sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v' - v}{z' - z};$$

elle est égale au quotient de la différence des vitesses au point commun par la différence des dilatations, ou plutôt à ce quotient changé de signe, car dans la figure telle qu'elle a été construite la valeur de dx est négative.

153. Le phénomène est le même encore quand les deux colonnes en contact appartiennent à un même gaz. On voit donc qu'une discontinuité qui se trouve, à un moment donné, établie dans un gaz, donne généralement naissance à trois autres; deux d'entre elles se propagent de part et d'autre de la tranche où se trouvait la discontinuité primitive; l'autre continue à subsister dans cette même tranche, mais elle ne porte plus que sur la dilatation.

L'une des discontinuités extrêmes disparaît quand il existe une certaine relation entre les vitesses et les pressions des deux colonnes en contact; les discontinuités extrêmes disparaîtraient même toutes les deux si la discontinuité primitive ne portait que sur les dilatations.

Enfin quand les mouvements dont sont animées les deux colonnes sont compatibles, ce qui exige que deux conditions soient satisfaites, la discontinuité primitive se déplace purement et simplement dans le corps sans donner naissance à d'autres.

Mais dans aucun cas on ne voit disparaître la discontinuité première.

Les discontinuités peuvent naître dans la colonne, lors même qu'on n'assujettit les extrémités qu'à des mouvements parfaitement continus: c'est ce qui a été prouvé dans le Chapitre précédent; mais elles peuvent

aussi prendre naissance aux extrémités, par la nature même des conditions qu'on impose à ces dernières. Si, par exemple, la colonne étant fermée par un piston, on anime brusquement celui-ci d'une certaine vitesse finie, on crée, par cela même, une discontinuité; il en est de même quand on fait varier brusquement la pression à laquelle est soumise cette extrémité.

Le phénomène est encore le même dans le cas où la discontinuité prend naissance dans le milieu du corps; seulement il n'y a plus lieu de s'occuper que d'un seul des mouvements qui prennent naissance, savoir celui qui se propage dans le mouvement primitif. Ce mouvement doit satisfaire à la condition imposée à l'extrémité; en même temps, il doit être compatible avec le mouvement primitif. Ce sont les seules qui lui soient imposées et elles doivent suffire à le définir, attendu qu'il n'y a qu'un mouvement possible.

154. On a montré dans le Chapitre II que, tant qu'une tranche gazeuse ne subissait pas de variation brusque de vitesse ou de dilatation, sa pression était reliée à sa dilatation par la relation adiabatique

$$p(1+z)^m = \text{const.}$$

Mais il n'en est pas de même quand elle subit dans sa vitesse ou dans sa dilatation une variation brusque.

Considérant en effet une discontinuité qui se propage avec une vitesse $\frac{dx}{dt}$ regardée comme positive ou comme négative, suivant qu'elle est dirigée vers les x positifs ou les x négatifs, on a, en désignant par v , z , p la vitesse, la dilatation et la pression de la tranche avant qu'elle soit atteinte par la discontinuité, par v_1 , z_1 et p_1 les mêmes quantités après que la discontinuité a parcouru la tranche, les trois relations

$$\rho_0(v_1 - v) \frac{dx}{dt} = p_1 - p,$$

$$(z_1 - z) \frac{dx}{dt} = v - v_1,$$

$$\left[\frac{\rho_0}{2}(v_1^2 - v^2) + \frac{p_1(1+z_1) - p(1+z)}{m-1} \right] \frac{dx}{dt} = p_1 v_1 - p v.$$

qui ne sont autres que celles des paragraphes précédents, où l'on a changé le signe de $\frac{dx}{dt}$.

La deuxième de ces relations montre que $v - v_1$ et $z_1 - z$ sont finies en même temps. Ainsi toute variation brusque de vitesse entraîne pour la tranche une variation brusque de dilatation.

On déduit d'ailleurs de ces relations

$$p_1 = p \frac{2(1+z) - (m-1)(z_1-z)}{2(1+z) + (m-1)(z_1-z)},$$

formule d'une haute importance qui permet de calculer la pression finale au moyen des données initiales et de la variation survenue dans la dilatation.

La formule peut être mise encore sous une autre forme. Soient ρ et ρ_1 les densités correspondant aux dilatations z et z_1 ; il est visible que

$$p_1 = p \frac{(m+1)\rho_1 - (m-1)\rho}{(m+1)\rho_1 + (m-1)\rho}$$

ou

$$p_1 = p \frac{(m+1) \frac{\rho_1}{\rho} - (m-1)}{(m+1) - (m-1) \frac{\rho_1}{\rho}}.$$

Le rapport des pressions est ainsi une fonction rationnelle du rapport des densités.

La pression p_1 est essentiellement positive, ce qui fixe des limites que ne peut dépasser le rapport $\frac{\rho_1}{\rho}$.

Supposant d'abord ce rapport supérieur à 1, ce qui arrive quand la variation brusque a pour effet de comprimer la tranche, le numérateur est toujours positif; il faut qu'il en soit de même du dénominateur.

Donc

$$\frac{\rho_1}{\rho} < \frac{m+1}{m-1}.$$

Si, au contraire, la variation brusque a pour effet de dilater la tranche,

$\frac{\rho_1}{\rho}$ est inférieur à l'unité; le dénominateur est positif; il faut que le numérateur le soit aussi, ce qui exige que

$$\frac{\rho_1}{\rho} > \frac{m-1}{m+1}.$$

Ainsi, quand une tranche gazeuse subit une variation brusque dans sa vitesse, sa dilatation et sa pression, le rapport de la densité finale à la densité initiale est nécessairement compris entre $\frac{m-1}{m+1}$ et $\frac{m+1}{m-1}$.

Les limites précédentes deviendraient zéro et l'infini, si le coefficient m était égal à l'unité, c'est-à-dire si le gaz suivait la loi de Mariotte.

135. Le résultat précédent paraît, au premier abord, paradoxal. C'est cependant une conséquence directe du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail.

Quand une tranche gazeuse subit une transformation dans laquelle sa vitesse varie d'une manière continue, la variation de sa force vive, ainsi qu'on l'a fait voir dans le Chapitre II, est la même que si la tranche était assimilée à un solide invariable. Mais, si la vitesse subit une variation brusque, la variation de la force vive entraîne une variation correspondante dans l'énergie interne. En d'autres termes, s'il y a accroissement de la force vive par exemple, une partie de cet accroissement s'opère aux dépens de la chaleur renfermée dans la tranche; lorsqu'au contraire il y a diminution de la force vive, une partie de la force vive perdue est employée à accroître l'énergie interne ou la température de la tranche.

On peut du reste calculer aisément la température à laquelle la tranche se trouve amenée par une variation brusque. Soient T , cette température, T_1 la température initiale: l'équation caractéristique du gaz pouvant être mise sous la forme

$$\frac{P}{\rho} = RT,$$

on a

$$T_1 = \frac{1}{R} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P}{R} \frac{(m+1) \frac{\rho_1}{\rho} - (m-1)}{\rho_1 \left[(m+1) - (m-1) \frac{\rho_1}{\rho} \right]},$$

ou, en remarquant que $\frac{p}{R} = \rho T$,

$$T_1 = T \frac{m+1 - (m-1) \frac{\rho}{\rho_1}}{m+1 - (m-1) \frac{\rho_1}{\rho}}.$$

Le rapport des températures absolues, initiale et finale, de la tranche, s'exprime encore par une fonction rationnelle du rapport des densités.

La température T , s'annule quand $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{m-1}{m+1}$ et devient infinie lorsque $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{m+1}{m-1}$. On s'explique ainsi pourquoi la pression p , devient nulle ou infinie suivant que le rapport $\frac{\rho_1}{\rho}$ atteint l'une ou l'autre de ces deux limites.

136. Si la transformation qui a fait passer la tranche de la densité ρ à la densité ρ_1 avait été continue, la quantité $\frac{p}{\rho^m}$ se serait montrée constante, de sorte que, en désignant par p'_1 la nouvelle pression correspondant à la densité ρ_1 , on aurait eu

$$\frac{p'_1}{\rho_1^m} = \frac{p}{\rho^m}, \quad p'_1 = p \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^m.$$

Il est naturel de comparer les pressions p , et p'_1 . A cet effet, il faut déterminer le signe de la différence

$$p - p'_1 = p \left[\frac{(m+1) \frac{\rho_1}{\rho} - (m-1)}{m+1 - (m-1) \frac{\rho_1}{\rho}} - \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^m \right],$$

pour les valeurs de $\frac{\rho_1}{\rho}$ comprises entre $\frac{m-1}{m+1}$ et $\frac{m+1}{m-1}$.

On démontre sans difficulté que cette différence est positive ou négative suivant que $\frac{\rho_1}{\rho}$ est supérieur ou inférieur à l'unité. Ainsi, pour une variation donnée de la densité, la variation de pression est plus considérable quand elle a lieu brusquement que lorsqu'elle s'opère par degrés insensibles.

157. Les résultats qui ont été obtenus dans les numéros précédents conduisent à des conséquences importantes.

On a fait voir, dans le Chapitre II, que l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement d'un gaz parfait était, en faisant abstraction des forces extérieures, du frottement et de la viscosité,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m f(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f'(x) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m},$$

ou bien, en choisissant convenablement l'état initial,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La pression p_0 est constante, mais la densité ρ_0 est variable dans le gaz, de sorte que la température, pour l'instant initial, varie d'une tranche à l'autre; le gaz peut néanmoins être en équilibre dans cet état, la conductibilité étant regardée comme rigoureusement nulle.

Cette équation convient tant qu'il ne se manifeste pas de discontinuité dans le mouvement; la fonction de x désignée par ρ_0 reste la même. On va voir qu'il n'en est plus ainsi lorsqu'il se produit des discontinuités.

En effet, l'équation précédente suppose qu'il existe toujours, entre la densité ρ d'une tranche et sa pression p , la relation adiabatique

$$\frac{p}{\rho^m} = \text{const.} = \frac{p_0}{\rho_0^m}.$$

C'est ce qui a lieu, en effet, quand la transformation de cette tranche s'opère d'une manière continue.

Mais quand la densité ρ éprouve une variation brusque, de manière à passer de ρ à ρ_1 , l'équation $\frac{p}{\rho^m} = \frac{p_1}{\rho_1^m}$ n'est plus satisfaite; elle est remplacée par la suivante

$$p_1 = p \frac{(m+1) \frac{\rho_1}{\rho} - (m-1)}{m+1 - (m-1) \frac{\rho_1}{\rho}},$$

qui ne peut être identique avec la précédente, à moins que l'on n'ait $m = 1$.

Quand m est différent de l'unité, la quantité $\frac{p_1}{\rho_1^m}$ est différente de $\frac{p}{\rho^m}$ et par suite de $\frac{p_0}{\rho_0^m}$. Tant que la tranche ne subira plus de variations brusques, la quantité $\frac{p}{\rho^m}$ se montrera de nouveau constante, mais la constante aura une nouvelle valeur, différente de la première.

On peut déterminer une quantité ρ'_0 , telle que

$$\frac{p_0}{(\rho'_0)^m} = \frac{p_1}{\rho_1^m}.$$

Dans tous les états que prendra la tranche à partir de la variation brusque, la relation entre sa pression et sa densité sera évidemment la même que si, à l'instant initial, la pression étant, comme précédemment, égale à p_0 , sa densité avait été ρ'_0 .

La discontinuité dont on vient de déterminer l'effet sur une tranche se propage, comme on l'a montré, dans la colonne gazeuse, de sorte qu'elle se fait sentir successivement à une infinité de tranches. Supposant qu'elle ait pris naissance en un point x_1 , et qu'à un certain moment elle soit parvenue en un autre point x_2 , toutes les tranches comprises entre x_1 et x_2 auront subi des variations analogues.

Dans leurs transformations ultérieures, supposées continues, la relation entre la pression et la densité sera la même que si chaque tranche, possédant à l'état initial la pression p_0 , avait eu une densité représentée, non plus par ρ_0 , mais par une autre fonction ρ'_0 de x .

Ainsi, la portion de la colonne parcourue par une discontinuité ne satisfait plus à l'équation du second ordre primitive, mais à une autre

$$\rho'_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le passage d'une discontinuité dans une colonne gazeuse modifie donc l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui régit son mouvement.

158. Si les discontinuités étaient produites dans le gaz uniquement par les conditions imposées aux extrémités, on resterait maître, en n'imposant à ces extrémités que des mouvements continus, de conserver toujours la même équation aux dérivées partielles, mais il n'en est pas ainsi. On sait en effet qu'elles doivent généralement prendre naissance dans le sein de la colonne, même quand les conditions imposées aux extrémités sont parfaitement continues, au moment où le mouvement rencontre les arêtes de rebroussement des surfaces intégrales. Il n'est donc pas possible, quand on étudie d'une manière générale le mouvement d'un gaz dont l'état initial est donné, de conserver toujours la même équation aux dérivées partielles du second ordre.

Pour obtenir une équation qui soit toujours satisfaite, il faut, dans cette équation du second ordre, éliminer la fonction ρ_0 de x . On y parvient en l'écrivant de la manière suivante

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{mp_0}{\rho_0}$$

et prenant la dérivée par rapport à t , ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + (m+1) \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = 0,$$

équation du troisième ordre aux dérivées partielles, qui seule reste constante pendant tout le mouvement; elle est, comme on le voit, indépendante de l'état initial et reste la même pour tous les gaz qui ont même rapport des chaleurs spécifiques.

L'équation aux dérivées partielles, qui régit le mouvement d'un gaz parfait renfermé dans un tube cylindrique, est donc du troisième ordre, et non du second comme on l'avait toujours admis jusqu'à présent.

C'est à cette équation qu'il faudra recourir pour analyser certains des phénomènes du mouvement, en particulier la manière dont les disconti-

nités se développent quand le mouvement rencontre les arêtes de rebroussement des intégrales des diverses équations du second ordre, considérées jusqu'à présent et qui sont les intégrales particulières de l'équation du troisième ordre.

Cette étude délicate sera renvoyée à un autre travail. On se bornera ici à considérer quelques cas particuliers des discontinuités, qui peuvent être analysés complètement sans avoir recours à l'équation du troisième ordre.

Toutefois on peut faire dès à présent une remarque au sujet des caractéristiques de cette équation. Leurs projections horizontales sont données par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{dx}{dt} = 0;$$

d'où l'on tire pour $\frac{dx}{dt}$ trois valeurs

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}},$$

faciles à calculer quand l'intégrale particulière qui représente le mouvement est connue. Soient ρ_0 et p_0 les quantités, qui correspondent à l'équation du deuxième ordre à laquelle satisfait l'intégrale particulière en question; on a

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{m p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1}.$$

Les deux dernières valeurs de $\frac{dx}{dt}$ sont donc celles qui correspondent aux vitesses de propagation du mouvement dans cette intégrale particulière. La première valeur de $\frac{dx}{dt}$ correspondrait à une vitesse de propagation nulle, qui trouve elle-même son application. On a montré en effet que, si une discontinuité prenait naissance dans le sein du gaz, elle donnait nais-

sance à trois autres, savoir deux qui se propagent de part et d'autre de la discontinuité primitive et une troisième ne portant que sur la dilatation et qui demeure toujours au même point. La vitesse de propagation de cette dernière est donc nulle et correspond à la troisième caractéristique.

Le rôle de ces courbes remarquables n'est donc pas moins important pour l'équation du troisième ordre que pour les équations du second ordre.

IV. — PROPAGATION D'UN ÉBRANLEMENT UNIFORME DANS UN GAZ EN REPOS.

139. Une colonne gazeuse est en repos. L'une de ses extrémités, correspondant à l'abscisse $x = 0$, est fermée par un piston, auquel on imprime brusquement une certaine vitesse V , que l'on maintient ensuite constante. On se propose de déterminer le mouvement du gaz.

Nous avons déjà, M. le colonel Sebert et moi, traité ce problème dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 25 février 1884). Pour le résoudre, nous admettions, ainsi qu'on l'avait toujours fait jusqu'alors, que pour chaque tranche du gaz le rapport $\frac{p}{\rho^m}$ demeurerait constant pendant tout le mouvement, même quand la densité subissait des variations brusques. La solution que nous avons donnée n'est donc pas rigoureusement exacte et il est nécessaire de la modifier.

Dès le début du mouvement, il se produit une discontinuité dans la tranche qui est en contact avec le piston; cette discontinuité se propage dans la colonne, qui se trouve ainsi, à un instant t , partagée en deux parties; l'une est encore en repos, tandis que l'autre est animée d'un certain mouvement qu'il s'agit de déterminer.

Mais toute la partie de la colonne qui est en mouvement a subi l'effet de la discontinuité; par conséquent ce mouvement n'est pas représenté par une intégrale de l'équation primitive aux dérivées partielles

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où ρ_0 désigne la densité, p_0 la pression dans le gaz en repos.

Le mouvement cherché est une intégrale d'une autre équation de même forme, dans laquelle la fonction p_0 est différente. On va montrer que cette intégrale est linéaire.

Posant à cet effet

$$u = Ax + Bt + C,$$

il suffit de démontrer que les trois constantes A, B et C peuvent être déterminées de manière que la fonction u satisfasse à la condition imposée à l'extrémité $x = 0$.

Il faut d'abord que, pour $x = 0$, la valeur de $\frac{\partial u}{\partial t}$ soit constamment égale à V, ce qui donne $B = V$, et que, de plus, u soit nul pour $x = 0$, $t = 0$, ce qui exige que $C = 0$. La condition imposée à l'extrémité conduit donc à poser

$$u = Ax + Vt,$$

le coefficient A restant seul arbitraire.

160. Il reste à chercher maintenant si l'on peut disposer du coefficient A de manière que le mouvement précédent soit compatible avec l'état de repos défini par $u = 0$.

Les conditions de compatibilité ont été données au n° 151. Elles deviennent dans ce cas, en désignant par p_1 la pression développée dans le gaz en mouvement,

$$(1) \quad \rho_0 V \frac{dx}{dt} = p_1 - p_0,$$

$$(2) \quad A \frac{dx}{dt} = -V,$$

$$\left[\frac{\rho_0}{2} V^2 + \frac{p_1(1+A) - p_0}{m-1} \right] \frac{dx}{dt} = p_1 V.$$

La dernière, comme on le sait, peut être remplacée par la suivante

$$(3) \quad p_1 = p_0 \frac{2 - (m-1)A}{2 + (m+1)A}.$$

Les équations (1), (2) et (3) renferment trois quantités arbitraires,

savoir A , p_1 et $\frac{dx}{dt}$. Il suffit donc de les déterminer au moyen de ces trois équations pour que les conditions de compatibilité soient satisfaites.

Le mouvement cherché est donc bien représenté par une intégrale linéaire; en tous les points la vitesse est la même et égale à celle du piston V , la dilatation est constante et égale à A , la pression et la densité sont également constantes.

161. L'élimination de $\frac{dx}{dt}$ entre les deux premières équations donne

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho_0 V^2}{A}$$

et, en substituant dans la troisième, on obtient

$$(4) \quad A^2 - \frac{m+1}{2m} \frac{\rho_0}{p_0} V^2 A - \frac{1}{m} \frac{\rho_0}{p_0} V^2 = 0,$$

équation du deuxième degré qui détermine A .

Remplaçant A par $-\frac{V}{\frac{dx}{dt}}$, on trouve

$$(5) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{m+1}{2} V \frac{dx}{dt} - \frac{mp_0}{\rho_0} = 0.$$

Cette équation est aussi du second degré et donne la valeur de la vitesse de propagation du mouvement.

Les racines de l'équation (5) sont toujours réelles: l'une est positive et l'autre négative; supposant, pour fixer les idées, V positif, la racine positive est supérieure à la racine négative. L'une des racines correspond au cas où la colonne gazeuse se trouve du côté des x positifs, l'autre au cas où cette colonne se trouverait du côté des x négatifs.

On peut encore interpréter autrement les deux racines, en supposant que le gaz s'étende à la fois dans les deux sens et que le piston soit infiniment mince. En lui communiquant brusquement une vitesse V , le mouvement se propage dans les deux directions avec des vitesses représentées

respectivement par les deux racines de l'équation (5). Le produit de ces deux vitesses est égal à $\frac{mp_0}{\rho_0}$, c'est-à-dire au carré de la vitesse normale du son, laquelle est ainsi moyenne proportionnelle entre les valeurs de $\frac{dx}{dt}$.

La racine positive de l'équation (5) est

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m+1}{4} V + \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + \frac{mp_0}{\rho_0}}$$

ou, en désignant par a la vitesse normale du son $\sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}}$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m+1}{4} V + \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}.$$

La vitesse de propagation est croissante avec V . Quand V s'annule, cette vitesse est égale à a , résultat conforme à ce qui a été obtenu dans les Chapitres précédents. Lorsque V augmente de plus en plus et que le rapport $\frac{a}{V}$ devient négligeable, la vitesse de propagation peut approximativement être représentée par $\frac{m+1}{2} V$ et devient ainsi proportionnelle à la vitesse du piston.

Il reste à considérer la racine négative qui correspond au cas où la colonne gazeuse se trouverait du côté des x négatifs; mais on parvient au même résultat en supposant la colonne placée comme ci-dessus et supposant V négatif. Il suffit alors de remplacer dans la formule précédente V par $-V_1$; elle devient

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V_1^2 + a^2} - \frac{m+1}{4} V_1.$$

Le mouvement du piston est alors dirigé de manière à dilater le gaz. La vitesse de propagation, égale à a pour $V_1 = 0$, diminue quand V_1 augmente et convergerait vers zéro si V_1 pouvait augmenter indéfiniment; mais on verra plus loin que V_1 ne peut dépasser une limite finie au delà de laquelle le gaz ne suivrait plus le piston, de sorte que le vide se produirait à l'arrière de celui-ci.

162. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0 V}.$$

Remplaçant dans l'équation (5) $\frac{dx}{dt}$ par cette valeur, on a, pour déterminer la pression p_1 dans le gaz en mouvement, l'équation du second degré

$$(6) \quad (p_1 - p_0)^2 - \frac{m+1}{2} \rho_0 V^2 (p_1 - p_0) - m \rho_0 p_0 V^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont toujours réelles; l'une est positive et donne $p_1 > p_0$; elle correspond au cas où le mouvement du piston est dirigé de manière à comprimer le gaz; l'autre est négative et correspond au cas où ce mouvement est dirigé en sens contraire.

La résolution de l'équation donne, pour la racine positive,

$$p_1 = p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}.$$

La pression p_1 , nulle pour $V = 0$, augmente avec V et croît indéfiniment en même temps que la vitesse. Lorsque la vitesse est assez grande pour que le rapport $\frac{a}{V}$ soit négligeable devant $\frac{m+1}{4}$, la différence $p_1 - p_0$ est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse V .

La deuxième racine s'obtient en remplaçant V par $-V_1$, on trouve

$$p_1 = p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V_1^2 - \rho_0 V_1 \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V_1^2 + a^2}.$$

Elle est égale à p_0 quand V_1 est nulle; mais elle décroît quand V_1 augmente. Toutefois, il faut remarquer que la pression p_1 ne peut devenir négative et cette circonstance assigne à V_1 une limite que cette vitesse ne peut dépasser. Cette limite s'obtient en égalant à zéro le second membre de l'équation précédente et l'on obtient sans difficulté

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 p_0}{(m-1) \rho_0}}$$

ou

$$V_1 = a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}.$$

C'est la limite de la vitesse que peut prendre brusquement un gaz en repos. Cette limite serait d'ailleurs infinie si m était égal à l'unité.

Rien n'empêche, il est vrai, de supposer que l'on communique brusquement au piston une vitesse supérieure à V_1 et dirigée de manière à dilater le gaz. Mais celui-ci ne prendra néanmoins qu'une vitesse égale à $a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$, de sorte que le vide se produira à l'arrière du piston.

Quand la valeur de V_1 est égale à cette limite, la vitesse de propagation du mouvement devient

$$\frac{dx}{dt} = a \left[\sqrt{1 + \frac{2}{m(m-1)} \left(\frac{m+1}{4} \right)^2} - \sqrt{\frac{2}{m(m-1)} \left(\frac{m+1}{4} \right)^2} \right] = a \sqrt{\frac{m-1}{2m}}.$$

C'est la plus faible valeur que puisse prendre $\frac{dx}{dt}$ dans le cas d'une discontinuité brusque.

Lorsque m est égal à $1,4$, comme cela a lieu pour l'air atmosphérique, cette vitesse limite de propagation est égale très approximativement à

$$0,378 a.$$

La pression p_1 étant nulle, la dilatation A est, en vertu de l'équation (3), égale à $\frac{2}{m-1}$. Il en résulte que la densité est devenue $\frac{\rho_0(m-1)}{2}$. Enfin il est visible que la température du gaz s'est abaissée au zéro absolu.

Si donc, une colonne gazeuse étant limitée par un piston, on animait brusquement ce piston d'une vitesse égale ou supérieure à $a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$, dirigée de manière à détendre le fluide, la température de la tranche la plus rapprochée du piston descendrait instantanément au zéro absolu, sa densité ne devenant pas nulle, mais diminuant dans le rapport de 1 à $\frac{m-1}{2}$; cette tranche acquerrait une vitesse égale à $a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$ et le mouvement

se propagerait dans la colonne avec la vitesse $a\sqrt{\frac{m-1}{2}}$, toutes les tranches atteintes par le mouvement étant amenées instantanément au même état que la première.

L'expérience n'est évidemment pas réalisable, non seulement par suite de l'impossibilité d'imprimer brusquement au piston une vitesse finie, mais encore parce que les propriétés des gaz sont complètement modifiées quand la température devient inférieure à une certaine limite. Cependant la théorie précédente permet d'expliquer, mieux qu'on ne l'avait fait jusqu'ici, le grand abaissement de température qui se produit quand un gaz est dilaté brusquement et qui peut avoir pour conséquence de le solidifier.

Cet abaissement de température ne provient nullement, comme on le dit d'ordinaire, de ce que les tranches qui se détendent empruntent aux tranches voisines la chaleur nécessaire à produire leur force vive, mais de ce que l'énergie interne de chaque tranche qui se détend sert à produire sa propre force vive. On peut même retrouver ainsi la valeur de la vitesse limite d'écoulement due à une détente brusque.

L'énergie interne d'une tranche de longueur dx est, en effet, égale à $\frac{p_0 \omega dx}{m-1}$ et sa masse à $\rho_0 \omega dx$. Si, la tranche prenant une vitesse V , sa force vive est acquise aux dépens de son énergie interne, la limite de cette vitesse est donnée par l'équation

$$\frac{p_0 \omega dx}{m-1} = \frac{\rho_0}{2} \omega dx V^2, \quad \text{d'où} \quad V^2 = \frac{2}{m-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

ce qui est précisément la valeur obtenue plus haut.

163. Ainsi qu'on l'a déjà fait observer, il est impossible de communiquer brusquement au piston une vitesse finie V ; mais on peut lui communiquer cette vitesse dans un temps extrêmement court et les résultats précédents représentent avec une grande approximation le phénomène plus complexe qui s'accomplit dans la réalité.

Cependant il semble exister une contradiction au sujet de la vitesse de

propagation du mouvement qui, constamment égale à a quand il ne se produit pas de discontinuités, acquiert des valeurs bien différentes quand la vitesse est communiquée brusquement au piston.

Il n'est pas inutile d'entrer dans quelques explications à ce sujet; mais il faut examiner séparément le cas où la vitesse du piston est dirigée de manière à comprimer le gaz et le cas où elle a pour effet d'accroître son volume.

Dans le premier cas, si la vitesse du piston augmente d'une manière continue jusqu'à ce qu'elle ait atteint la valeur V , le mouvement est représenté d'abord par une intégrale développable, qui se propage dans le repos avec la vitesse a . Mais le phénomène est modifié dès que le mouvement vient à rencontrer l'arête de rebroussement de la surface intégrale et l'on a vu, dans le Chapitre précédent, que cette arête de rebroussement est rencontrée d'autant plus vite que la vitesse varie avec plus de rapidité.

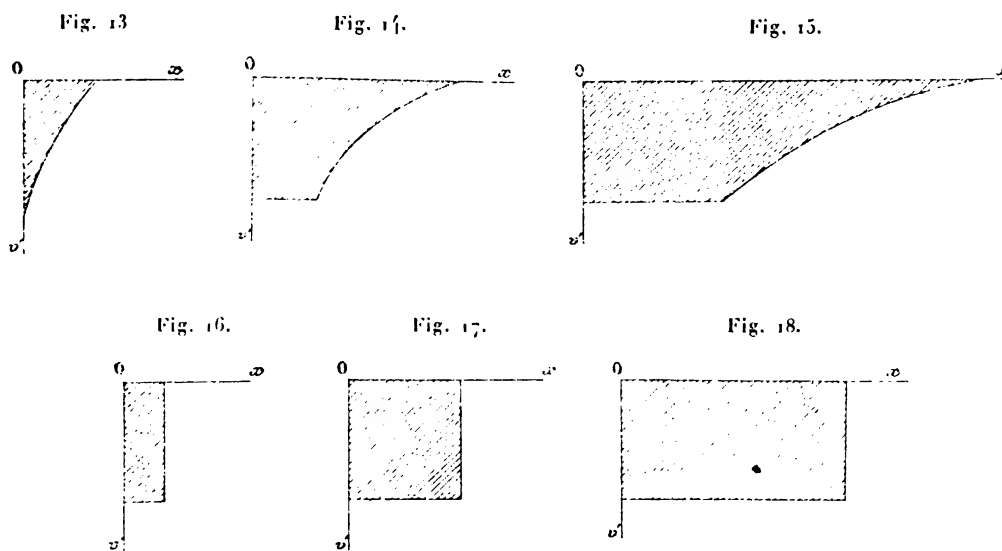
A partir de cet instant, les ondes élémentaires parties successivement de l'origine se rejoignent, créant ainsi une discontinuité dans la dernière tranche en mouvement. Par suite de cette discontinuité, la vitesse de propagation est modifiée et elle converge sans doute vers la valeur que l'on trouverait en supposant la vitesse V communiquée brusquement au piston.

L'hypothèse d'une vitesse communiquée instantanément au piston ne fait donc que supprimer la première phase du phénomène dont la durée devient très faible en même temps que le temps employé, dans la réalité, pour communiquer au piston la vitesse V .

On peut donc, quand la vitesse est communiquée très rapidement au piston, admettre que cette vitesse a été acquise instantanément, sans commettre d'erreur appréciable.

Considérant maintenant le cas où la vitesse du piston est dirigée de manière à accroître le volume du fluide, si on la suppose acquise par une variation continue, le mouvement est représenté constamment par l'intégrale développable, puisque dans ces conditions l'arête de rebroussement n'intervient pas, ainsi qu'on l'a montré précédemment. La vitesse de propagation du mouvement est donc toujours représentée par a , tandis que,

si la vitesse du piston était acquise instantanément, elle serait inférieure à a . Les phénomènes présentent donc une différence bien marquée, suivant que la vitesse du piston est acquise brusquement ou qu'elle lui est communiquée dans un temps fini, quelque petit que soit d'ailleurs ce temps. Cette différence est mise en évidence dans les diagrammes ci-dessous, qui représentent comparativement, dans l'une et l'autre hypothèse, les courbes des vitesses à différents instants du mouvement.



L'une des courbes est toujours une droite horizontale, tandis que l'autre comprend une partie horizontale et une partie curviligne. Cette dernière partie s'éloigne de plus en plus, de sorte que, si la différence entre les deux diagrammes peut être approximativement négligée dans les premiers instants, il n'en est plus de même au bout d'un certain temps.

L'état du gaz dilaté par un piston auquel on aurait communiqué brusquement une vitesse finie peut, à certains égards, être regardé comme instable, car, si le temps pendant lequel le piston a acquis cette vitesse n'est pas rigoureusement nul, l'état du gaz diffère de plus en plus de celui qui correspond à une variation brusque.

On aurait été conduit à des conséquences analogues en considérant les courbes de dilatation.

Ce qui précède permet de rendre compte d'une autre contradiction apparente relative aux vitesses limites d'écoulement. Il a été démontré dans le Chapitre IV que si, un gaz étant limité par un piston, on donne à ce dernier un mouvement constamment accéléré et dirigé de manière à accroître le volume primitif du gaz, celui-ci cesse de suivre le piston quand sa vitesse dépasse la limite $\frac{2a}{m-1}$, qui constitue ainsi la vitesse limite d'écoulement du gaz. La tranche extrême du gaz possède alors une dilatation infinie et sa température s'est abaissée au zéro absolu.

Mais, quand la vitesse est communiquée brusquement au piston, le vide se produit à l'arrière dès qu'elle dépasse $a\sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$, quantité bien inférieure à la précédente. La vitesse limite d'écoulement, dans ce cas, est donc bien plus faible que dans le premier. Le rapport de la première vitesse à la seconde est égal à $\sqrt{\frac{2m}{m-1}}$, ce qui donne $\sqrt{7}$ quand on fait $m = 1,4$.

Le phénomène est d'ailleurs bien différent dans les deux cas; en effet, dans le premier, la tranche extrême possède seule la vitesse $\frac{2a}{m-1}$; la vitesse des tranches suivantes devient de plus en plus faible, jusqu'au point extrême atteint par le mouvement, où cette vitesse s'annule; la dilatation varie de même entre l'infini et zéro. Dans le second cas au contraire, toutes les tranches atteintes par le mouvement possèdent la même vitesse; la dilatation est aussi constante et égale à $\frac{2}{m-1}$. Partout enfin la température s'est abaissée au zéro absolu, bien que la dilatation ne soit pas infinie.

V. — APPLICATION A LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

164. Le piston mobile étant supposé séparer deux colonnes du même gaz possédant, à l'instant initial, même température et même densité, il est intéressant de rechercher la résistance que le gaz oppose à son mouvement.

Cette détermination présente un certain intérêt par les indications

qu'elle peut fournir sur la manière dont varie, avec la vitesse, la résistance que l'air oppose au mouvement des projectiles. Toutefois, les conditions sont loin d'être les mêmes, car, le mouvement du projectile ayant lieu dans l'air indéfini, le fluide peut s'écouler dans toutes les directions.

Si, le piston étant d'abord en repos, sa vitesse variait par degrés insensibles, il existerait constamment entre la pression p à l'avant et la vitesse V la relation

$$p = p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} V \right)^{\frac{2m}{m-1}}$$

(Chapitre IV, n° 116); de même la pression p' à l'arrière serait

$$p' = p_0 \left(1 - \frac{m-1}{2a} V \right)^{\frac{2m}{m-1}}.$$

La résistance R que le piston éprouve de la part du fluide, rapportée à l'unité de surface, est $p - p'$; donc on a

$$R = p_0 \left[\left(1 + \frac{m-1}{2a} V \right)^{\frac{2m}{m-1}} - \left(1 - \frac{m-1}{2a} V \right)^{\frac{2m}{m-1}} \right],$$

expression qui est applicable tant qu'il ne s'est pas produit de discontinuité dans le mouvement.

Lorsque la vitesse V est très petite, l'expression précédente se réduit sensiblement à

$$\frac{2mp_0}{a} V = \frac{2mp_0 a}{a^2} V = 2a \rho_0 V.$$

La résistance est ainsi proportionnelle à la vitesse et s'obtient en multipliant cette dernière par la masse d'une colonne de fluide de longueur égale à la vitesse du son. C'est la valeur connue, donnée par la théorie élémentaire. On voit ici pourquoi elle cesse de convenir quand la vitesse V n'est pas très petite.

La valeur de R augmente avec V ; mais il faut remarquer que, quand V devient supérieur à $\frac{2a}{m-1}$, la pression p' à l'arrière du piston s'annule, de

sorte que la résistance est représentée simplement par la formule

$$R = p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2a} V \right)^{\frac{2m}{m-1}}.$$

Il faut donc avoir recours à deux formules : l'une convient pour V , compris entre zéro et $\frac{2a}{m-1}$, l'autre, pour V , compris entre $\frac{2a}{m-1}$ et l'infini.

165. Les formules sont bien différentes quand on suppose la vitesse V communiquée brusquement au piston. Les pressions p_1 et p'_1 à l'avant et à l'arrière sont alors les racines de l'équation (6) du n° 162, de sorte que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}, \\ p'_1 &= p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 - \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}. \end{aligned}$$

La résistance, rapportée à l'unité de surface, est $p_1 - p'_1$; ainsi

$$R = 2 \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}.$$

Quand la vitesse V est très petite, on retrouve encore l'expression simplifiée du numéro précédent, de sorte que la résistance est proportionnelle à la vitesse. Lorsque V augmente, il en est de même de R ; mais il arrive un moment où la formule cesse d'être applicable. On a montré en effet que la pression p'_1 s'annulait quand V dépassait la limite $a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$. La formule ne s'applique donc que pour V compris entre zéro et $a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$. Quand la vitesse V surpasse $a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}$, il faut prendre $R = p_1$, c'est-à-dire que l'on a

$$R = p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}.$$

Lorsque la vitesse V est très grande, de manière que le rapport $\frac{a}{V}$ soit négligeable à côté de l'unité, on a sensiblement

$$R = \frac{m+1}{2} \rho_0 V^2.$$

La résistance deviendrait ainsi proportionnelle au carré de la vitesse et à la densité; de plus, elle serait indépendante de la température, ce qui n'a pas lieu avec la formule complète; car, pour une densité ρ_0 donnée, la pression p et la quantité a^2 sont proportionnelles à la température absolue.

166. Revenant maintenant au cas où la vitesse du piston, d'abord égale à zéro, varie rapidement sans discontinuité, pour atteindre une valeur V et demeurer ensuite constante, il est clair que, pendant les premiers instants, la résistance éprouvée par le mobile est représentée par les formules du n° 164, dans lesquelles on attribuerait à chaque instant à la vitesse V une valeur égale à celle que possède le piston.

Mais la longueur de la colonne gazeuse étant supposée indéfinie dans les deux sens, il ne tarde pas à se produire à l'avant une discontinuité et l'état du gaz se rapproche rapidement de ce côté de celui qui existerait si la vitesse V avait été brusquement communiquée au piston. A l'arrière, au contraire, l'état du fluide est constamment représenté par l'intégrale développable.

Faisant donc abstraction des premiers instants, la pression à l'avant doit être regardée comme égale à p , et la pression à l'arrière comme égale à p' ou à zéro, suivant que la vitesse V est inférieure ou supérieure à $\frac{2a}{m-1}$.

La résistance R est donnée par l'une ou l'autre des deux formules suivantes

$$R = p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2} - p_0 \left(1 - \frac{m-1}{2a} V\right)^{\frac{2m}{m-1}},$$

$$R = p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2},$$

la première convenant quand V est inférieur à $\frac{2a}{m-1}$, la deuxième quand V est plus grand que $\frac{2a}{m-1}$.

Lorsque la vitesse V est très faible, la première expression se réduit sensiblement à $2a\rho_0 V$. Quand la vitesse V est assez grande pour que le rapport $\frac{a}{V}$ soit négligeable à côté de l'unité, la deuxième expression donne encore approximativement

$$R = \frac{m+1}{2} \rho_0 V^2.$$

167. Quand il s'agit de projectiles de l'artillerie, la vitesse V est communiquée au corps dans un temps extrêmement court, qui atteint à peine 1 ou 2 centièmes de seconde. La résistance que l'air oppose à leur mouvement serait donc représentée par les formules du numéro précédent, si l'on avait le droit d'assimiler le phénomène à celui qui se passe dans un tuyau cylindrique indéfini. Il est bien évident que cette assimilation n'est nullement permise, car, dans la réalité, le gaz déplacé par le projectile peut s'écouler latéralement. La manière dont s'effectue l'écoulement dépend d'ailleurs de la forme des corps à la partie antérieure et il en est de même de la résistance de l'air.

Toutefois, l'un des résultats fournis par la théorie précédente est vérifié par les expériences exécutées sur les projectiles. Ces expériences ont montré en effet d'une manière incontestable que la résistance opposée par l'air au mouvement des projectiles devenait très sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse, quand cette dernière surpassait 400^m ou 500^m (voir à ce sujet le *Traité de Balistique expérimentale*, t. II, p. 177 et 238 ⁽¹⁾).

Dans cet Ouvrage, on considère l'accélération r due à la résistance de l'air et qui, si ϖ désigne le poids du boulet, d son diamètre, est liée à la

(¹) *Traité de Balistique expérimentale*, par M. Hélie, 2^e édition; Paris, Gauthier-Villars, 1884.

résistance R , rapportée à l'unité de surface, par la formule

$$r = \frac{\pi d^2}{4} R \frac{g}{\varpi}.$$

Si l'on y remplace R par la valeur fournie par la théorie précédente, lorsque, V étant très grand, la résistance est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse, on trouve

$$r = \frac{\pi}{4} \frac{m+1}{2} \frac{\rho_0 g d^2}{\varpi} V^2$$

ou, en désignant par Δ le poids du mètre cube d'air,

$$r = \frac{\pi}{4} \frac{m+1}{2} \frac{\Delta d^2}{\varpi} V^2,$$

ce qui devient, en supposant $m = 1,4$,

$$r = 0,943 \frac{\Delta d^2}{\varpi} V^2.$$

Les expériences exécutées avec les boulets cylindriques ont montré que, pour les grandes vitesses, on avait en réalité

$$r = 0,580 \frac{\Delta d^2}{\varpi} V^2,$$

valeur notablement inférieure à la précédente, ainsi qu'on devait s'y attendre puisque le mouvement du projectile a lieu dans un milieu indéfini et non dans un tube qui empêche l'écoulement latéral du gaz.

168. Au lieu de supposer la colonne gazeuse comme limitée par un piston auquel on imprime brusquement une certaine vitesse, on peut concevoir que l'on établisse instantanément à l'extrémité de la colonne une différence finie de pression, ou plutôt que l'on maintienne constamment la pression de cette tranche extrême à une valeur p_1 différente de la pression initiale p_0 .

Dans ce cas le mouvement que prend le gaz est encore représenté par une expression linéaire

$$u = Ax + Vt,$$

car la compatibilité de ce mouvement avec le repos existera constamment si l'on satisfait aux trois équations

$$\rho_0 V \frac{dx}{dt} = p_1 - p_0,$$

$$A \frac{dx}{dt} = -V,$$

$$p_1 = p_0 \frac{2 - (m-1)A}{2 + (m+1)A},$$

lesquelles renferment trois arbitraires, V , A et $\frac{dx}{dt}$. La dernière donne

$$A = \frac{2(p_0 - p_1)}{(m+1)p_1 + (m-1)p_0}.$$

Il est visible que la valeur de A est toujours comprise entre $-\frac{2}{m+1}$ et $\frac{2}{m-1}$, cette dernière valeur correspondant au cas où $p_1 = 0$.

Les deux premières équations donnent ensuite

$$V^2 = \frac{2}{\rho_0} \frac{(p_0 - p_1)^2}{(m+1)p_1 + (m-1)p_0},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{(m+1)p_1 + (m-1)p_0}{2\rho_0}.$$

On ne s'arrêtera pas à discuter ces formules; il suffira de faire remarquer que, si p_1 s'annule, on a

$$V = \sqrt{\frac{2p_0}{(m-1)\rho_0}} = -a \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}},$$

$$\frac{dx}{dt} = a \sqrt{\frac{m-1}{2m}},$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus précédemment.

VI. — RÉFLEXION D'UN ÉBRANLEMENT UNIFORME.

169. Dans l'analyse qui précède, on a supposé la colonne gazeuse indéfinie, de sorte que l'on n'a pas eu à considérer les phénomènes de réflexion qui s'accomplissent à l'autre extrémité du tuyau. Mais, quand le mouvement qui prend naissance à l'extrémité $x = 0$ est représenté par une expression linéaire de la forme

$$(1) \quad u = Ax + Bt,$$

on peut aisément étudier ce phénomène de réflexion, pourvu toutefois que les conditions imposées à l'autre extrémité soient l'une ou l'autre des suivantes : 1° cette extrémité est fixe ; 2° la tranche extrême est astreinte à conserver une pression constante. Ces deux cas particuliers correspondent à ceux qui sont étudiés dans les Traités de Physique sous le nom de *réflexion avec changement de signe* et de *réflexion sans changement de signe*.

La réflexion se produit au moment où le mouvement représenté par la formule (1) est parvenu à l'extrémité $x = \lambda$. Toute la colonne est alors animée d'une vitesse B ; mais on ne change rien à la nature du phénomène en imprimant à tout le système une vitesse égale et contraire à B . La colonne est ramenée au repos ; la dilatation a une valeur constante A et la pression a également une valeur constante p_1 . Si l'extrémité d est maintenue fixe, elle se trouve, par suite du mouvement général imprimé au système, animée de la vitesse $-B$, et le problème est ramené à celui qui a été traité plus haut. Si, au contraire, la pression de la tranche extrême est maintenue constante et égale à p_0 , le problème est ramené à celui du n° 168.

Le nouveau mouvement qui prend naissance à l'extrémité λ est donc encore représenté par une formule linéaire dont on détermine les coefficients au moyen des conditions de compatibilité.

On peut même aller plus loin et déterminer les réflexions successives du mouvement sur les deux extrémités de la colonne ; on obtiendra tou-

jours des intégrales linéaires, dont on déterminera les coefficients au moyen des conditions de compatibilité. Les calculs ne présentent aucune difficulté.

170. Comme application, on donnera la solution du problème suivant :

Un gaz est en repos dans un tuyau cylindrique limité d'un côté par une base inébranlable; à l'autre extrémité, le tuyau est fermé par un piston auquel on imprime brusquement une vitesse V , dirigée de manière à comprimer le gaz. Il s'agit de déterminer à chaque instant l'état du fluide.

Soient

\dot{p}_0 la pression;

ρ_0 la densité du gaz;

λ la longueur initiale de la colonne.

Le mouvement qui prend naissance à l'origine dès le début du phénomène est représenté, comme on sait, par une expression linéaire de la forme

$$u_1 = A_1 x + B_1 t + C_1.$$

Quand ce mouvement, qui se propage avec une vitesse $\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$, est arrivé à l'extrémité λ , il se produit une réflexion, c'est-à-dire qu'un nouveau mouvement u_2 prend naissance à cette extrémité; il est aussi représenté par une formule linéaire et l'on a

$$u_2 = A_2 x + B_2 t + C_2.$$

Le mouvement u_2 se propage dans u_1 avec une vitesse $\left(\frac{dx}{dt}\right)_2$ et finit par revenir à l'origine où prend naissance un nouveau mouvement analogue au précédent, et ainsi de suite.

On représentera d'une manière générale par

$$u_n = A_n x + B_n t + C_n,$$

l'un quelconque de ces mouvements, par p_n et ρ_n la pression et la densité correspondantes, enfin par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$ sa vitesse de propagation. Le problème sera évidemment résolu si l'on trouve des formules permettant de calculer, pour toutes les valeurs de n , les constantes A_n , B_n , C_n , ρ_n , p_n , $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$.

Lorsque n est impair, le mouvement considéré prend naissance au contact du piston et la formule doit représenter le mouvement de ce mobile, dont la vitesse est toujours égale à V ; ainsi $B_n = V$. Quand, au contraire, n est pair, la formule doit représenter le mouvement de la tranche λ , qui est toujours immobile; ainsi $B_n = 0$. Le coefficient B_n est ainsi alternativement égal à V et à zéro.

Soient t_{n-1} l'instant où prend naissance le mouvement d'indice n et t_n celui où il se réfléchit; il est clair que

$$t_n = t_{n-1} + \frac{\lambda}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_n}.$$

Lorsque n est impair, le déplacement du piston, à l'instant où le mouvement d'indice n prend naissance, est représenté aussi bien par la formule d'indice $n - 1$ que par la formule d'indice n . Ainsi $u_n = u_{n-1}$ pour $x = 0$ et $t = t_{n-1}$, ce qui donne

$$B_n t_{n-1} + C_n = B_{n-1} t_{n-1} + C_{n-1}$$

ou, puisque, n étant impair, $B_{n-1} = 0$, $B_n = V$,

$$C_n = C_{n-1} - V t_{n-1}.$$

Lorsque n est pair, le déplacement de l'extrémité λ devant être toujours nul, on a, puisque $B_n = 0$,

$$C_n = -\lambda A_n.$$

Enfin on a, quelle que soit la valeur de n ,

$$\rho_n = \frac{\rho_0}{1 + A_n}.$$

Il suffit maintenant d'obtenir les formules qui permettent de calculer p_n , $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$ et A_n .

171. A cet effet, il faut faire usage des formules qui expriment que le mouvement d'indice n est compatible avec le mouvement d'indice $n - 1$.

Ces formules sont, dans le cas de n impair,

$$(2) \quad \rho_0 V \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = p_n - p_{n-1},$$

$$(3) \quad (A_n - A_{n-1}) \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = -V,$$

$$(4) \quad p_n = p_{n-1} \frac{2(1 + A_{n-1}) - (m-1)(A_n - A_{n-1})}{2(1 + A_{n-1}) + (m+1)(A_n - A_{n-1})}.$$

Lorsque n est impair, les équations (2) et (3) sont remplacées par les suivantes

$$-\rho_0 V \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = p_n - p_{n-1}, \quad (A_n - A_{n-1}) \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = V.$$

Mais, dans le premier cas, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$ est positif, tandis que cette quantité est négative dans le second cas. Si donc on se borne à considérer les valeurs absolues de $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$, on pourra toujours faire usage des formules (2), (3) et (4).

L'élimination de A_n et de $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$ entre ces dernières relations fournit une équation du second degré en p_n ; il faut prendre la racine pour laquelle le signe du radical est positif, car, d'après la direction de la vitesse, il est visible que p_n est supérieur à p_{n-1} . On trouve ainsi

$$p_n = p_{n-1} + \frac{m+1}{4} \frac{\rho_0}{1 + A_{n-1}} V^2 + \frac{\rho_0}{1 + A_{n-1}} V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + \frac{m p_{n-1} (1 + A_{n-1})}{\rho_0}}$$

ou, en tenant compte de ce que $\rho_{n-1} = \frac{\rho_0}{1 + A_{n-1}}$,

$$p_n = p_{n-1} + \frac{m+1}{4} \rho_{n-1} V^2 + \rho_{n-1} V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + \frac{m p_{n-1}}{\rho_{n-1}}}.$$

La valeur de p_n est ainsi exprimée au moyen des quantités d'indices $n - 1$.

Des équations (2) et (3) on tire ensuite

$$A_n = A_{n-1} - \frac{\rho_0 V^2}{p_n - p_{n-1}}.$$

Quant à la valeur de $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$, elle est donnée par l'une des équations (2) ou (3).

La solution du problème est complète, puisque toutes les quantités d'indice n se déduisent sans ambiguïté des quantités d'indice $n - 1$ et que les quantités d'ordre zéro sont données.

Le mouvement du gaz est assez singulier. Le fluide est toujours divisé en deux parties : l'une, la plus rapprochée du piston, est animée d'un mouvement uniforme de vitesse V , l'autre est en repos. Le point de séparation se déplace alternativement dans les deux sens d'un mouvement uniforme dont la vitesse augmente, comme il est facile de le reconnaître, à chaque changement de sens. A certains instants tout le gaz est animé de la vitesse V ; à d'autres, au contraire, tout le gaz est en repos. La relation qui existe entre la pression et la densité n'est pas la même pour les deux parties du gaz; elle subit d'ailleurs en chaque tranche une variation brusque, chaque fois que cette tranche devient le siège de la discontinuité.

VII. — SUR LES MOUVEMENTS QUI PRENNENT NAISSANCE AU POINT DE CONTACT DE DEUX GAZ HOMOGÈNES.

172. On considère deux colonnes gazeuses en contact par une tranche; ces colonnes sont homogènes; la pression et la vitesse sont les mêmes en tous les points de chacune d'elles; mais il existe une discontinuité quand on passe d'une colonne à l'autre, de sorte qu'elles réagissent l'une sur l'autre. Il a été démontré précédemment qu'il naissait dans chacune des deux tranches en contact un nouveau mouvement qui se propage ensuite dans la colonne correspondante. Il est visible que les deux nouveaux mouvements sont représentés par des expressions linéaires dont il s'agit de déterminer les coefficients.

Les deux colonnes en présence étant homogènes, on peut compter les abscisses des tranches à partir de leur position initiale, de sorte que la dilatation doit être regardée comme nulle. De plus, si l'on imprime à tout le système une vitesse égale et contraire à celle de l'un des gaz, ce dernier se trouve ramené au repos sans que le phénomène soit en rien modifié. Une fois qu'on aura déterminé les mouvements qui prennent naissance au point de contact, il suffira d'augmenter les vitesses d'une constante pour obtenir le phénomène réel.

Supposant, pour fixer les idées, que la tranche de contact se trouve à l'origine des coordonnées et que la colonne qui se trouve du côté des x positifs ait une vitesse nulle, on désignera par p sa pression, ρ sa densité et m la valeur du rapport des chaleurs spécifiques. Soient p' , ρ' , m' les quantités correspondantes pour le deuxième gaz et V sa vitesse.

Les deux mouvements qui prennent naissance à la tranche de contact peuvent être représentés par les formules

$$u_1 = Ax + Bt, \quad u'_1 = A'x + B't$$

et il faut déterminer les constantes A , B , A' , B' qui représentent les dilatations et les vitesses des nouveaux mouvements, ainsi que leurs pressions

p_1 et p'_1 . Enfin il faut encore chercher les vitesses de propagation $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ dont on se bornera à considérer les valeurs absolues.

Or, ainsi que cela a été démontré aux n^{os} 149 et 150, il existe entre ces huit quantités les relations suivantes

$$\begin{aligned} B &= B', & p_1 &= p'_1, \\ \rho B \frac{dx}{dt} &= p_1 - p, & \rho'(B - V) \frac{dx'}{dt} &= p' - p'_1, \\ A \frac{dx}{dt} &= -B, & A' \frac{dx'}{dt} &= B' - V, \\ p_1 &= p \frac{2 - (m-1)A}{2 + (m+1)A}, & p'_1 &= p' \frac{2 - (m'-1)A'}{2 + (m'+1)A'} \end{aligned}$$

qui, par une élimination évidente, se réduisent aux quatre suivantes

$$\begin{aligned} (1) \quad & \rho B^2 = A(p - p_1), \\ (2) \quad & \rho'(B - V)^2 = A'(p' - p'_1), \\ (3) \quad & 2(p_1 - p) + A[(m+1)p_1 + (m-1)p] = 0, \\ (4) \quad & 2(p'_1 - p') + A'[(m'+1)p'_1 + (m'-1)p'] = 0, \end{aligned}$$

ne renfermant plus que quatre inconnues A , A' , B et p_1 .

173. Il est facile de voir que, si p_1 était connue, les autres inconnues s'obtiendraient sans ambiguïté. En effet, A et A' sont alors données par des équations du premier degré. Il en est de même de B^2 . D'ailleurs, les quantités $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ devant être positives, le signe de B est celui de $p_1 - p$.

Mais il faut calculer p_1 . Or l'élimination de A et A' donne

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{2(p - p_1)^2}{\rho[(m+1)p_1 + (m-1)p]}, \\ (B - V)^2 &= \frac{2(p' - p'_1)^2}{\rho'[(m'+1)p'_1 + (m'-1)p']}. \end{aligned}$$

Représentant par H et H' les seconds membres des équations précé-

dentes, l'élimination de B donne enfin

$$(5) \quad V^4 - 2V^2(H - H') + (H - H')^2 = 0,$$

équation qui est du sixième degré en p_1 .

On ne s'arrêtera pas à la discussion générale de cette équation, qui entraînerait à trop de longueurs. Il existe en général deux racines répondant à une même valeur de V^2 , l'une correspond au cas où V est positif, l'autre à celui où V est négatif. On déterminera celle des racines qui convient à la question en remarquant que les équations

$$\rho B \frac{dx}{dt} = p_1 - p, \quad \rho'(B - V) \frac{dx'}{dt} = p' - p,$$

doivent donner pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ des valeurs positives.

174. On a montré, dans le Chapitre IV, que si, un gaz en repos étant limité par un piston, on imprime à ce dernier une vitesse croissante donnée par la formule

$$v = \frac{2a}{m-1} \left(1 - \frac{at}{X}\right)^{-\frac{m-1}{m+1}} - \frac{2a}{m-1}$$

et qu'à partir d'un certain instant on maintienne constante la vitesse du piston, toutes les ondes élémentaires se rejoignent en même temps à la distance X et à l'instant $\frac{X}{a}$.

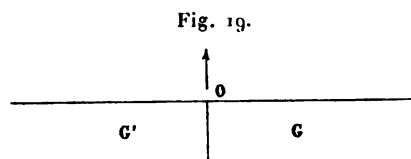
La colonne gazeuse se trouve alors séparée en deux parties : l'une est encore en repos, l'autre est animée d'une vitesse uniforme V et possède d'ailleurs en tous ses points même pression et même dilatation.

Il est maintenant possible de déterminer le mouvement ultérieur du gaz ; il suffit en effet d'appliquer la méthode des numéros précédents, en attribuant aux quantités p, p', ρ, ρ' des valeurs convenables et en faisant $m' = m$. On voit qu'au point X prennent naissance deux mouvements, dont l'un continue à se propager dans le gaz en repos, tandis que l'autre revient sur ses pas. Il y a donc réflexion de l'ébranlement primitif, avant qu'il soit parvenu à l'extrémité du tuyau.

Les nouveaux mouvements sont représentés par des expressions linéaires; considérant en particulier le mouvement qui revient en arrière pour rencontrer le piston, il subira, au moment de la rencontre, une réflexion par suite de laquelle prendra naissance en ce point un nouveau mouvement représenté encore par une intégrale linéaire. Celle-ci se propagera dans le gaz dans le sens des x positifs, sans subir d'altération jusqu'au moment où elle sera parvenue à la distance X , où se passera un phénomène analogue au premier.

Toutes les circonstances de ce phénomène singulier peuvent être déterminées sans autre difficulté que la longueur des calculs numériques.

175. Les calculs auxquels conduit la méthode générale se simplifient un peu, quand les colonnes gazeuses en contact sont toutes deux en repos, les pressions étant d'ailleurs différentes. Cet état pourrait être réalisé en



introduisant dans un même tube, séparé en deux parties par un opercule O , deux gaz G et G' à des pressions différentes et arrachant brusquement l'opercule. Le mouvement qui se produit alors est intéressant à considérer, au point de vue de l'écoulement des gaz avant que le régime permanent soit établi.

Il faut faire $V = 0$ dans les formules des n^{os} 172 et 173. L'équation (5) se réduit à

$$H - H' = 0$$

et l'on voit aisément qu'elle est du troisième degré. L'équation admet une racine comprise entre p et p' , car les quantités H et H' sont toujours positives; or H s'annule pour $p_1 = p$. Du reste, si l'on suppose $p > p'$, la fonction H est décroissante et la fonction H' croissante, quand p_1 varie de p' à p . Ainsi la racine considérée est unique.

C'est d'ailleurs la seule qui convienne à la question, car dans les deux équations

$$\rho B \frac{dx}{dt} = p_1 - p, \quad \rho' B \frac{dx'}{dt} = p' - p_1,$$

$\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ devant être positifs, il faut que $p_1 - p$ et $p' - p_1$ soient de même signe.

La pression p_1 est ainsi déterminée sans ambiguïté. On en déduit alors les valeurs de A , A' et B^2 , au moyen des équations (1), (3), (4). Il est visible que A est positif et A' négatif; de plus, la valeur de B est négative.

Si la pression p' diminue indéfiniment, il en est de même de ρ' ; la valeur de H étant finie, l'équation $H - H'$ exige que p' converge vers zéro. On a alors $A = \frac{2}{m-1}$ et, par suite,

$$B^2 = \frac{2p}{\rho(m-1)}, \quad B = -\sqrt{\frac{2p}{\rho(m-1)}}.$$

C'est la vitesse limite d'écoulement d'un gaz dans le cas d'une variation brusque de pression.

176. On a supposé dans les calculs ci-dessus que les valeurs de m et m' étaient différentes de l'unité. Les conclusions ne sont pas modifiées quand $m = m' = 1$, c'est-à-dire quand les deux gaz en présence suivent la loi de Mariotte. Toutefois, quand ces deux colonnes sont constituées par un même gaz à la même température, les deux mouvements qui prennent naissance au point commun sont identiques et peuvent, par suite, être représentés par la même expression linéaire, ainsi que cela a été annoncé précédemment.

On sait déjà que, dans ces deux mouvements, la pression et la vitesse sont les mêmes; pour qu'ils soient identiques, il faut que les densités ρ_1 et ρ'_1 soient aussi égales.

Or on a

$$A = \frac{\rho}{\rho_1} - 1, \quad A' = \frac{\rho'}{\rho'_1} - 1,$$

et les équations (3) et (4) du n°172 deviennent

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{p}{p_1}, \quad \frac{\rho'}{\rho'_1} = \frac{p'}{p'_1},$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\rho'_1} = \frac{p'}{\rho'} \frac{\rho}{p}.$$

Mais, les deux colonnes en présence appartenant à un même gaz et la température étant supposée la même, les pressions sont proportionnelles aux densités; le second membre de l'équation est égal à l'unité; donc $\rho_1 = \rho'_1$.

VIII. — SUR QUELQUES MOUVEMENTS DISCONTINUS REPRÉSENTÉS PAR DES INTÉGRALES DÉVELOPPABLES.

177. La détermination du mouvement que prend un gaz, à partir du moment où s'introduisent les discontinuités, n'a été jusqu'ici effectuée que pour des cas très particuliers, savoir ceux où les nouveaux mouvements sont représentés par des expressions linéaires de la forme

$$u = Ax + Bt + C,$$

qui, bien que la relation entre la pression et la densité ait été changée, satisfont néanmoins à l'équation du second ordre que l'on considère d'ordinaire, savoir

$$(1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = mp_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cette dernière est en effet satisfaite pour toute fonction linéaire de x et de t .

On va étudier maintenant un cas très général de mouvement, pour lequel les intégrales peuvent encore être obtenues et ne satisfont plus à l'équation précédente.

Il est nécessaire pour cela de rappeler une remarque faite au n° 96.

Quand un fluide homogène est animé d'un mouvement représenté par

une intégrale linéaire

$$u = Ax + Bt + C,$$

les intégrales compatibles avec la précédente suivant les caractéristiques à coefficient angulaire positif sont des surfaces développables satisfaisant à l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B + \psi(A) - \psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Pour les gaz parfaits,

$$\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{2a}{m-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m-1}{2}};$$

donc les surfaces développables en question sont définies par l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2a}{m-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m-1}{2}} - \frac{2a}{m-1} (1 + A)^{-\frac{m-1}{2}} + B.$$

178. On considère un gaz homogène en repos à la pression p_0 et à la densité ρ_0 . L'extrémité $x = 0$ est limitée par un piston auquel on imprime brusquement une vitesse V finie, puis on fait varier d'une manière continue la vitesse de ce piston suivant une loi, d'ailleurs arbitraire. Il s'agit de déterminer le mouvement qui se propage dans le gaz.

S'il ne se produisait pas de discontinuités, on sait que le mouvement serait représenté par l'une des intégrales développables de l'équation (1). Mais, la première vitesse V étant communiquée brusquement, une discontinuité se développe dans la tranche extrême et se propage ensuite dans la colonne.

On peut supposer d'abord que la vitesse V reste constante pendant un certain temps τ , à partir duquel elle varie d'une manière continue. Pendant ce temps τ , le mouvement n'est autre que celui qui a été étudié aux nos 159 et suivants. Il est représenté par une expression de la forme

$$u = Ax + Vt,$$

dans lequel

$$A = \frac{m+1}{4} \frac{V^2}{a^2} - \frac{V}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{m+1}{4}\right)^2 \frac{V^2}{a^2}};$$

la pression p_1 est d'ailleurs

$$p_1 = p_0 + \frac{m+1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}.$$

La relation entre la pression et la dilatation n'est plus celle qui est supposée dans l'équation (1), car la quantité $p_1(1+A)^{-m}$ est différente de p_0 .

Mais on peut poser

$$p'_0 = p_1(1+A)^{-m}.$$

Le gaz en mouvement se trouve dans le même état que si, sa pression initiale étant p'_0 et sa densité ρ_0 , la détente de chaque tranche avait eu lieu suivant la loi adiabatique; par conséquent, tant qu'il ne se produira pas de discontinuité nouvelle, le mouvement de cette colonne sera régi par l'équation

$$(2) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m p'_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Lors donc qu'à l'instant τ la vitesse du piston commencera à varier d'une manière continue, le mouvement nouveau qui prendra naissance dans la colonne déjà ébranlée sera une intégrale de l'équation (2).

179. Or, d'après la remarque faite au n° 177, ce mouvement sera donné par l'une des intégrales développables de l'équation (2) qui, si l'on pose $a_1^2 = \frac{m p'_0}{\rho_0}$, sont définies par l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2a_1}{m-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\frac{m-1}{2}} - \frac{2a_1}{m-1} (1+A)^{-\frac{m-1}{2}} + V.$$

La fonction arbitraire introduite par l'intégration sera déterminée de manière à satisfaire au mouvement du piston.

Les intégrales de l'équation précédente, sauf celle qui est linéaire, ne

satisfont aucunement à l'équation (1), car les intégrales développables de cette dernière sont définies par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \pm \frac{2a}{m-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-\frac{m-1}{2}},$$

α étant une constante arbitraire.

Les résultats qui précèdent sont évidemment indépendants de la durée τ et ne sont pas modifiés quand cette dernière s'annule.

180. On vient d'obtenir des mouvements qui ne satisfont nullement à l'équation aux dérivées partielles primitives, mais ils correspondent à un cas où l'on a introduit une discontinuité dans la condition imposée à l'extrémité. On va maintenant montrer comment on peut obtenir des mouvements analogues, tout en n'imposant à l'extrémité de la colonne que des mouvements parfaitement continus.

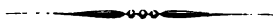
Supposant en effet que, le gaz étant en repos, on imprime au piston un mouvement défini par la relation

$$v = \frac{2a}{m-1} \left(1 - \frac{at}{X} \right)^{-\frac{m-1}{m+1}} - \frac{2a}{m-1},$$

jusqu'à un certain instant τ , à partir duquel on laisse à la vitesse la valeur atteinte V , on sait que toutes les ondes élémentaires arrivent ensemble à la distance X , où naît instantanément une discontinuité. De plus on a montré au n° 174 qu'au point X prennent naissance deux mouvements, dont l'un continue à se propager dans le même sens, tandis que l'autre revient du côté de l'origine, où il arrive à un instant τ . La colonne comprise entre l'origine et X est alors animée d'un mouvement représenté par une intégrale linéaire, qui subit à l'instant τ , contre le piston une réflexion facile à calculer. Après cette réflexion, la portion de la colonne la plus voisine de l'origine est animée d'un mouvement défini par une intégrale linéaire et la relation existant jusque-là entre la pression et la densité se trouve modifiée. Les mouvements continus qui peuvent prendre naissance dans cette colonne sont donc représentés par des intégrales d'une équation telle que (2).

Si, à partir d'un instant $\tau_2 > \tau_1$, la vitesse du piston, jusque-là égale à V , varie d'une manière continue, il prendra naissance un mouvement qui se propagera dans le précédent et qui sera représenté par une intégrale développable analogue à celle du numéro précédent, laquelle ne satisfera nullement à l'équation primitive.

Cette intégrale, qui pourrait être déterminée sans autre difficulté que la longueur des calculs, se développera donc dans le gaz sans qu'il y ait de discontinuité dans la condition imposée à l'extrémité, car la vitesse du piston n'aura subi aucune variation brusque.



SUR LE DÉVELOPPEMENT
EN SÉRIE
DU POTENTIEL DES SPHÉROÏDES DE RÉVOLUTION;

PAR M. O. CALLANDREAU.

Newton a d'abord résolu complètement le problème de l'attraction d'une sphère ou d'une couche sphérique sur un point donné. Le problème analogue, dans le cas d'un corps engendré par la révolution d'une ellipse autour d'un de ses axes, appelé *sphéroïde* par Newton, offrait de grandes difficultés; elles furent surmontées par Maclaurin et Legendre. Dans les travaux de Clairaut, d'Alembert, Legendre, Lagrange et Laplace, le mot *sphéroïde* désigne plus généralement un corps qui se rapproche de la sphère sans être nécessairement de révolution. Le Chapitre I du Livre III de la *Mécanique céleste*, consacré à l'attraction des ellipsoïdes, a pour titre : *Des attractions des sphéroïdes homogènes terminés par des surfaces du second degré*, tandis que le Chapitre II traite du *Développement en série des attractions des sphéroïdes quelconques*.

Il est nécessaire d'entrer dans quelques explications pour faire comprendre l'objet du présent travail.

Par un point d'un sphéroïde homogène quelconque, le centre de gravité si l'on veut, menons trois axes rectangulaires; soient x, y, z les coordonnées du point attiré, r, θ, ψ ses coordonnées polaires, de sorte que

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta;$$

soient $x', y', z'; r', \theta', \psi'$ les coordonnées rectangulaires et polaires d'un

élément dm du sphéroïde de densité ρ ; on aura

$$dm = \rho dx' dy' dz' = \rho r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\psi';$$

le potentiel

$$V = \int \frac{dm}{\Delta},$$

où Δ désigne la distance du point attiré à un point quelconque du sphéroïde, s'écrira

$$(1) \quad V = \iiint \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

ou

$$(1') \quad V = \iiint \frac{\rho r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\psi'}{\sqrt{r^2 - 2rr'p + r'^2}},$$

en posant

$$(2) \quad p = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi' - \psi).$$

Dans la dernière expression de V , l'intégrale relative à r' devra être prise depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = u$, u étant une fonction donnée de θ' et ψ' qui exprime le rayon vecteur d'un point quelconque de la surface du sphéroïde; on pose habituellement

$$(3) \quad r = a(1 + \alpha r),$$

α étant une petite-quantité et r une fonction de θ et ψ ; les intégrales relatives à θ' et ψ' seront prises depuis $\theta' = 0$ et $\psi' = 0$ jusqu'à $\theta' = \pi$ et $\psi' = 2\pi$.

D'après la théorie du potentiel, les composantes de l'attraction du sphéroïde sur le point (x, y, z) , supposé de masse égale à l'unité, seront

$$(4) \quad X = f \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = f \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = f \frac{\partial V}{\partial z};$$

f attraction des deux masses égales à l'unité de distance.

D'une autre manière, si l'on décompose l'attraction en trois forces R , R' , R'' , l'une dirigée suivant le rayon r , l'autre suivant une perpendicu-

laire à ce rayon, menée dans le plan de l'angle θ , la troisième suivant une perpendiculaire à ce plan, on aura

$$(4') \quad R = f \frac{\partial V}{\partial r}, \quad R' = f \frac{\partial V}{r \partial \theta}, \quad R'' = f \frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \psi}.$$

Chacune de ces forces sera positive ou négative, selon qu'elle tendra à augmenter ou à diminuer la variable qui lui correspond, c'est-à-dire le rayon r pour la force R , l'angle θ pour R' , et l'angle ψ pour R'' .

Il y a deux cas dans lesquels on peut facilement s'assurer de la possibilité de développer le potentiel en série :

1° Le sphéroïde attirant est tout entier compris dans une sphère décrite de l'origine comme centre avec r pour rayon. Alors

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'p + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}p + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

est développable en série convergente suivant les puissances de $\frac{r'}{r}$:

$$(5) \quad \left(1 - 2\frac{r'}{r}p + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{r'}{r}P_1 + \frac{r'^2}{r^2}P_2 + \dots + \frac{r'^n}{r^n}P_n + \dots;$$

posons de plus avec Poisson

$$(6) \quad \sin \theta' d\theta' d\psi' = d\omega;$$

$d\omega$ étant l'élément de la surface sphérique de rayon égal à l'unité et dont le centre est à l'origine des coordonnées. Le potentiel relatif aux points extérieurs et suffisamment éloignés de la surface du sphéroïde s'exprimera par la série

$$V_e = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int \left(\int_0^u \rho r'^{n+2} dr' \right) P_n d\omega;$$

l'indice de V indique qu'il s'agit des points extérieurs.

Si l'on partage le sphéroïde en deux parties, la sphère de rayon a , plus

l'excès du sphéroïde relativement à la sphère, il viendra pour le potentiel

$$(7) \quad V_e = \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \frac{1}{r} + \rho \sum_0^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int \left(\int_a^{\infty} r'^{n+2} dr' \right) P_n d\omega;$$

2° La sphère de rayon r est tout entière comprise dans le sphéroïde et à l'intérieur de la sphère de rayon a . En considérant de même, au lieu du corps attirant, la sphère de rayon a , plus l'excès du sphéroïde relativement à la sphère, il viendra

$$(8) \quad V_i = 2 \pi \rho a^2 - \frac{2 \pi \rho a^2}{3} + \rho \sum_0^{\infty} r^n \int \left(\int_a^{\infty} \frac{dr'}{r'^{n+1}} \right) P_n d\omega;$$

l'indice i indique que le potentiel est relatif aux points intérieurs, qui doivent être suffisamment éloignés de la surface du sphéroïde.

Les deux formules qui donnent V_e et V_i reproduisent celles de Poisson (*Connaissance des Temps pour 1829 : Additions*); elles ont été appliquées par Legendre et Laplace à toutes les positions du point attiré, et même quand le point attiré se trouve sur la surface du sphéroïde. Poisson, dans le Mémoire cité, a fait remarquer qu'une telle extension n'était pas permise *a priori*, même dans le cas de la convergence des séries V_e et V_i , et il s'est proposé de la justifier. Toutefois son Mémoire, complété à quelques égards par Todhunter (*Proceedings de la Société royale de Londres*, t. XX; 1872), n'est pas sans soulever quelques difficultés dans l'esprit, et l'on n'aperçoit pas nettement le rôle des propriétés caractéristiques du potentiel.

M. Tisserand ayant appelé mon attention sur cette question, d'une importance manifeste pour la théorie de la figure de la Terre et des planètes, j'ai cherché à vérifier les expressions de V_e et V_i au moyen du beau théorème, appliqué par Dirichlet aux formules de l'attraction des ellipsoïdes (*Journal de Crelle*, t. XXXII), en considérant surtout les sphéroïdes homogènes, de révolution et possédant un équateur. Tel est l'objet de ce travail.

1. Le théorème de Dirichlet dont nous allons faire application peut s'énoncer ainsi :

Si la fonction $V(x, y, z)$, définie pour tous les points de l'espace (au moyen d'une ou de plusieurs formules, suivant les portions de l'espace), jouit des propriétés suivantes :

1° V et ses premières dérivées par rapport à x, y, z sont continues dans tout l'espace;

2° A l'exception de certains points (appartenant à des lignes ou à des surfaces, exclusion faite des volumes), on a dans tout l'espace, soit extérieur, soit intérieur au corps,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{0 \text{ point ext.}}{-4\pi\rho \text{ point int.}}$$

ρ étant la densité au point (x, y, z) qui fait partie des masses attirantes;

3° Les produits

$$Vx, \quad Vy, \quad Vz; \quad x^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z^2 \frac{\partial V}{\partial z}$$

ne deviennent jamais infinis;

$V(x, y, z)$ est le potentiel des masses attirantes relativement au point (x, y, z) .

Les propriétés ci-dessus sont caractéristiques pour le potentiel.

En vue de l'application actuelle, il convient de transformer un peu ce théorème.

Quand on introduit les coordonnées polaires, r, θ, ψ , l'équation que le potentiel vérifie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{0 \text{ point ext.}}{-4\pi\rho \text{ point int.}},$$

donne

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial \sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \right) = \frac{0 \text{ point ext.}}{-4\pi\rho \text{ point int.}}.$$

Si le corps attirant est supposé homogène et de révolution, ρ est une constante et V ne dépend pas de ψ ; l'équation se réduit à

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial \sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{0 \text{ point ext.}}{-4\pi\rho \text{ point int.}}.$$

V_e et V_i désignant les séries représentatives du potentiel, soit

$$U_e = V - V_e, \quad U_i = V - V_i,$$

nous devons supposer que V_e , V_i vérifient respectivement l'équation précédente.

On aura, dans les deux cas du point extérieur et du point intérieur la même équation,

$$\frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial \sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

Par suite l'intégrale double

$$\iint \left(\sin \theta \frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) U \, dr \, d\theta,$$

prise de $r = 0$ à $r = R$ et de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, est identiquement nulle.

Appliquant la règle d'intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} U \, dr &= \left(U r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0^R - \int r^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 dr, \\ \int \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} U \, d\theta &= \left(\sin \theta U \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_0^\pi - \int \sin \theta \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 d\theta, \end{aligned}$$

à condition toutefois que les termes $U \frac{\partial U}{\partial r}$ et $U \frac{\partial U}{\partial \theta}$, produits par l'intégration par parties en dehors du signe \int , soient des fonctions continues de r et de θ ; admettons qu'il en soit ainsi. Ensuite on peut prendre R assez grand pour qu'il y ait accord entre V et V_e pour $r = R$; la partie $\left(U r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0^R$ sera nulle. Il en sera évidemment de même de la partie $\left(\sin \theta U \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_0^\pi$.

Il en résulte qu'on a identiquement

$$\iint \sin \theta \left[r^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 \right] dr \, d\theta = 0;$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

pour toutes les valeurs de r et θ comprises entre 0 et R , 0 et π . U est donc constant, et à cause de $U = 0$ pour $r = R$, U est zéro.

Donc :

1° Si V_e, V_i vérifient respectivement les équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r^2 \frac{\partial V_e}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial \sin \theta \frac{\partial V_e}{\partial \theta}}{\sin \theta \partial \theta} = 0, \\ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial \sin \theta \frac{\partial V_i}{\partial \theta}}{\sin \theta \partial \theta} \right) = -4\pi\rho; \end{array} \right.$$

2° Si V_e, V_i , et leurs premières dérivées par rapport à r et θ , sont continues à l'extérieur et à l'intérieur du corps et s'accordent pour la surface du corps, l'ensemble des formules V_e et V_i représentera le potentiel en tous les points de l'espace.

2. Les séries (7) et (8) données plus haut pour V_e et V_i se simplifient dans le cas présent. D'après le théorème d'addition des fonctions sphériques,

$$P_n = X_n X'_n + \frac{2}{n(n+1)} \frac{dX_n}{d\mu} \frac{dX'_n}{d\mu'} \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi' - \psi) \\ + \frac{2}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \frac{d^2 X_n}{d\mu^2} \frac{d^2 X'_n}{d\mu'^2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos 2(\psi' - \psi) + \dots,$$

μ et μ' tenant lieu de $\cos \theta, \cos \theta'$; X_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \dots + \alpha^n X_n + \dots,$$

et X_n devient X'_n quand θ' remplace θ .

Les intégrales

$$\int \left(\int'' \rho r'^{n+2} dr' \right) P_n d\omega, \quad \int \left(\int'' \rho \frac{dr'}{r'^{n-1}} \right) P_n d\omega,$$

deviennent

$$2\pi\rho X_n \int_0^\pi \frac{r'^{n+3} - a^{n+3}}{n+3} X'_n \sin\theta' d\theta', \quad 2\pi\rho X_n \int_0^\pi \frac{r'^{2-n} - a^{2-n}}{2-n} X'_n \sin\theta' d\theta';$$

et, pour $n > 2$, en supprimant les accents et introduisant la variable $\mu = \cos\theta$,

$$(10) \quad \frac{2\pi\rho X_n}{n+3} \int_{-1}^{+1} r'^{n+3} X_n d\mu, \quad \frac{2\pi\rho X_n}{2-n} \int_{-1}^{+1} r'^{2-n} X_n d\mu.$$

Cela posé, si les séries à termes positifs

$$(11) \quad \varphi_e = \sum \frac{1}{r^{n+1}} \left| \int_{-1}^{+1} r'^{n+3} X_n d\mu \right|, \quad \varphi_i = \sum r^n \left| \int_{-1}^{+1} r'^{2-n} X_n d\mu \right|$$

sont convergentes, la limite du rapport d'un terme au précédent étant < 1 et cela quand r est le rayon vecteur d'un point quelconque de la courbe méridienne, les séries V_e , V_i seront convergentes; les dérivées successives des fonctions V_e et V_i par rapport à r seront représentées par les séries des termes dérivés; la même chose aura lieu pour les dérivées par rapport à θ , à cause de la formule connue

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos\theta + \sqrt{-1} \sin\theta \cos\omega)^n d\omega.$$

Enfin toutes ces séries convergentes seront des fonctions continues de r et de θ , en vertu de la remarque suivante de M. Weierstrass. Soit

$$(\alpha) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

une série dont tous les termes dépendent de la variable x ; soit en outre

$$(\beta) \quad v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

une série convergente dont tous les termes sont des nombres positifs donnés : s'il arrive que pour chaque valeur de x , appartenant à un intervalle donné, les termes de la série (α) soient en valeur absolue, inférieurs

aux termes de même rang de la série (β) , la série (α) sera, dans l'intervalle donné, absolument et uniformément convergente. On démontre ensuite que la somme de la série (α) est une fonction continue de x dans l'intervalle donné (J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 135 et suiv.; PICARD, *Cours d'Analyse*; premières Leçons). Les équations caractéristiques du potentiel sont d'ailleurs vérifiées : chaque terme des séries, tel que $r^n X_n$ ou $\frac{X_n}{r^{n+1}}$, donne un résultat identiquement nul; *a priori*, on sait que V_e et V_i se confondent avec le potentiel quand le point attiré n'est pas très près de la surface du sphéroïde.

3. Il reste donc à constater que la continuité n'est pas rompue à la surface et que $V_e, V_i; \frac{\partial V_e}{\partial r}, \frac{\partial V_i}{\partial r}; \frac{\partial V_e}{\partial \theta}, \frac{\partial V_i}{\partial \theta}$ y prennent les mêmes valeurs. Poisson a montré (*loc. cit.*, p. 370) que les deux formules pour V_e et V_i développées suivant les puissances de la petite quantité α conduisaient, pour les points de la surface, à des expressions identiques dans les premiers termes, et qu'il en était de même des séries dérivées $\frac{\partial V_e}{\partial r}, \frac{\partial V_i}{\partial r}$. Il faut établir la chose d'une manière générale.

Nous nous servons des mêmes notations que Poisson. Développons en séries ordonnées suivant les puissances de α les intégrales

$$\int \left(\int_a^u r'^{n+1} dr' \right) P_n d\omega, \quad \int \left(\int_a^u \frac{dr'}{r'^{n-1}} \right) P_n d\omega$$

des formules (7) et (8).

y' étant ce que devient y quand θ' et ψ' remplacent θ et ψ ,

$$u = a(1 + \alpha y').$$

Développons les puissances successives de y en séries de fonctions sphériques, en sorte qu'on ait

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots$$

et généralement

$$y^{(i)} = Y_0^{(i)} + Y_1^{(i)} + Y_2^{(i)} + \dots + Y_n^{(i)} + \dots,$$

il viendra, en vertu des formules fondamentales pour ces développements :

$$\begin{aligned} \int Y_m^{(i)} P_n d\omega &= 0, & \int Y_n^{(i)} P_n d\omega &= \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{(i)}, \\ \int \left(\int_a^r r'^{n+2} dr' \right) P_n d\omega \\ &= \frac{4\pi a^{n+3}}{2n+1} \left[\alpha Y_n + \frac{n+2}{2} \alpha^2 Y_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+2)(n+1)}{2 \cdot 3} \alpha^3 Y_n^{(2)} + \frac{(n+2)(n+1)n}{2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^4 Y_n^{(3)} + \dots \right], \\ \int \left(\int_a^r \frac{dr'}{r'^{n-1}} \right) P_n d\omega \\ &= \frac{4\pi a^{2-n}}{2n+1} \left[\alpha Y_n - \frac{n-1}{2} \alpha^2 Y_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)n}{2 \cdot 3} \alpha^3 Y_n^{(2)} - \frac{(n-1)n(n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^4 Y_n^{(3)} + \dots \right]; \end{aligned}$$

après quoi les formules (7) et (8) donneront

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{4\pi\rho a^3}{3r} + \frac{4\pi\rho a^3}{r} \left[\alpha \sum \frac{1}{2n+1} \frac{a^n}{r^n} Y_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2}{2} \sum \frac{n+2}{2n+1} \frac{a^n}{r^n} Y_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} \sum \frac{(n+2)(n+1)}{2n+1} \frac{a^n}{r^n} Y_n^{(2)} + \dots \right], \\ V_i &= 2\pi\rho a^2 - \frac{2\pi\rho r^2}{3} + 4\pi\rho a^2 \left[\alpha \sum \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{a^n} Y_n \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2}{2} \sum \frac{n-1}{2n+1} \frac{r^n}{a^n} Y_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} \sum \frac{(n-1)n}{2n+1} \frac{r^n}{a^n} Y_n^{(2)} + \dots \right], \end{aligned}$$

et, en développant $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ et $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ suivant les puissances de α ,

$$\begin{aligned} V_e = & \frac{4\pi\rho a^2}{3} + 4\pi\rho a^2\alpha \left[\sum \frac{1}{2n+1} Y_n - \frac{\gamma}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2\alpha^2 \left[\frac{1}{2} \sum \frac{n+2}{2n+1} Y_n^{(1)} - \gamma \sum \frac{n+1}{2n+1} Y_n + \frac{\gamma^2}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2\alpha^3 \left[\frac{1}{2.3} \sum \frac{(n+2)(n+1)}{2n+1} Y_n^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1} \sum \frac{(n+2)(n+1)}{2n+1} Y_n^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma^2}{1.2} \sum \frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} Y_n - \frac{\gamma^3}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2\alpha^4 \left[\frac{1}{2.3.4} \sum \frac{(n+2)(n+1)n}{2n+1} Y_n^{(3)} \right. \\ & \quad - \frac{1}{2.3} \frac{\gamma}{1} \sum \frac{(n+2)(n+1)(n+1)}{2n+1} Y_n^{(2)} \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{1.2} \sum \frac{(n+2)(n+1)(n+2)}{2n+1} Y_n^{(1)} \\ & \quad \left. - \frac{\gamma^3}{1.2.3} \sum \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n+1} Y_n + \frac{\gamma^4}{3} \right] \\ & + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_i = & 2\pi\rho a^2 - \frac{2}{3}\pi\rho a^2 + 4\pi\rho a^2\alpha \left[\sum \frac{1}{2n+1} Y_n - \frac{\gamma}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2\alpha^2 \left[-\frac{1}{2} \sum \frac{n-1}{2n+1} Y_n^{(1)} + \frac{\gamma}{1} \sum \frac{n}{2n+1} Y_n - \frac{\gamma^2}{6} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2\alpha^3 \left[\frac{1}{2.3} \sum \frac{(n-1)n}{2n+1} Y_n^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1} \sum \frac{(n-1)n}{2n+1} Y_n^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma^2}{1.2} \sum \frac{n(n-1)}{2n+1} Y_n \right] \\ & + 4\pi\rho a^2\alpha^4 \left[-\frac{1}{2.3.4} \sum \frac{(n-1)n(n+1)}{2n+1} Y_n^{(3)} \right. \\ & \quad + \frac{1}{2.3} \frac{\gamma}{1} \sum \frac{(n-1)nn}{2n+1} Y_n^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{1.2} \sum \frac{(n-1)n(n-1)}{2n+1} Y_n^{(1)} \\ & \quad \left. + \frac{\gamma^3}{1.2.3} \sum \frac{n(n-1)(n-2)}{2n+1} Y_n \right] \\ & + \dots; \end{aligned}$$

la loi de formation est évidente.

REMARQUE. — Les numérateurs des fonctions de n sur lesquelles portent les signes Σ dans V_e et V_i jouissent de cette propriété qu'on passe de V_e à V_i en changeant n en $-(n+1)$.

Considérons les termes en α^p . Soient $\frac{f(u)}{2n+1}$ et $\frac{f(v)}{2n+1}$ deux coefficients qui se correspondent dans V_e et V_i , u et v tenant la place de n et de $-(n+1)$; dans la différence $V_e - V_i$, le signe Σ portera sur

$$\frac{f(u) - f(v)}{2n+1} = \frac{f(u) - f(v)}{u - v};$$

c'est une fonction symétrique de u et de v , une fonction entière de $u + v$ et de uv , par suite une fonction entière de $n(n+1) = N$.

On calcule les premiers coefficients de la différence $V_e - V_i$:

$$\begin{aligned} V_e - V_i = & 0 + 4\pi\rho a^2 \alpha [0] + 4\pi\rho a^2 \alpha^2 \left[\frac{1}{2} \sum Y_n^{(1)} - \frac{\gamma}{1} \sum Y_n + \frac{\gamma^2}{2} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2 \alpha^3 \left[\frac{1}{2 \cdot 3} \sum 2 Y_n^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1} \sum 2 Y_n^{(1)} + \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} \sum 2 Y_n - \frac{\gamma^3}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2 \alpha^4 \left[\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sum N Y_n^{(3)} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\gamma}{1} \sum (N+2) Y_n^{(2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} \sum (N+4) Y_n^{(1)} - \frac{\gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum (N+6) Y_n + \frac{\gamma^4}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2 \alpha^5 \left[\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sum 0 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\gamma}{1} \sum 2 N Y_n^{(3)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} \sum (4N+4) Y_n^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum (6N+12) Y_n^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sum (8N+24) Y_n - \frac{\gamma^5}{3} \right] \\ & + 4\pi\rho a^2 \alpha^6 \left[\frac{1}{6!} \sum (N^2 - 2N) Y_n^{(5)} - \frac{1}{5!} \frac{\gamma}{1} \sum (N^2 - 2N) Y_n^{(4)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4!} \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} \sum (N^2 + 4N) Y_n^{(3)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3!} \frac{\gamma^3}{3!} \sum (N^2 + 16N + 12) Y_n^{(2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2!} \frac{\gamma^4}{4!} \sum (N^2 + 34N + 48) Y_n^{(1)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\gamma^5}{5!} \sum (N^2 + 58N + 120) Y_n + \frac{\gamma^6}{3} \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

Quelle est la loi des coefficients dans le groupe des termes en α^p ? Ces sont des fonctions entières de N dont le degré p' est égal au plus grand entier contenu dans $\frac{p-2}{2}$: $p' = \left(\frac{p-2}{2}\right)$. Après quelques essais, on est amené à penser, qu'en général, les différences d'ordre 2, 4, 6, . . . des coefficients des puissances successives de N , à partir de la plus haute, dans la suite des polynômes

$$\frac{f(u) - f(v)}{2n+1} = N^{p'} + C_1 N^{p'-1} + C_2 N^{p'-2} + \dots$$

sont constantes.

Considérons le polynôme de rang $q+1$. On aura, pour la fonction $f(u)$ correspondante,

$$f^{(q)}(u) = (n+2)(n+1) \dots (n-p+q+4)(n+1)(n+2) \dots (n+q).$$

Soit, pour un moment,

$$f^{(q)}(u) = n^{p-1} + A_1^{(q)} n^{p-2} + A_2^{(q)} n^{p-3} + \dots;$$

à cause de l'identité

$$f^{(q)}(u)(n+q+1) = f^{(q+1)}(u)(n-p+q+4),$$

il existe une suite de relations récurrentes telles que

$$\begin{aligned} A_1^{(q+1)} - A_1^{(q)} &= (q+1) + (p-q-4), \\ A_2^{(q+1)} - A_2^{(q)} &= (q+1)A_1^{(q)} + (p-q-4)A_1^{(q+1)}, \\ &\dots, \\ A_i^{(q+1)} - A_i^{(q)} &= (q+1)A_{i-1}^{(q)} + (p-q-4)A_{i-1}^{(q+1)}, \\ &\dots; \end{aligned}$$

on déduit de là que $A_1^{(q+1)} - A_1^{(q)}$ est indépendant de q et constant; il est aisé de le vérifier directement : $A_1^{(q)}$ est de la forme $a + bq$ et les différences sont constantes. En général, les différences d'ordre i des $A_i^{(q)}$ sont constantes.

Les mêmes remarques étant applicables à $f^{(q)}(\nu)$, il en résulte que, dans

$$\frac{f^{(q)}(u) - f^{(q)}(\nu)}{2n+1} = N^{p'} + C_1^{(q)} N^{p'-1} + C_2^{(q)} N^{p'-2} + \dots,$$

les différences d'ordre 2, 4, 6, ... de $C_1^{(q)}$, $C_2^{(q)}$, $C_3^{(q)}$, ... sont constantes.

Ce point établi, on transforme les expressions $\Sigma N^i Y_n$.

Les fonctions Y_n vérifient l'équation

$$n(n+1)Y_n = D_\mu [(\mu^2 - 1)D_\mu Y_n] - \frac{1}{1-\mu^2} D_\psi^2 Y_n;$$

la multiplication de Y_n par $n(n+1)$ équivaut à l'opération du second membre exécutée sur Y_n ; on la désigne par ∇ ; ∇^i indique que cette opération est répétée i fois; on aura $\Sigma N^i Y_n = \nabla^i \Sigma Y_n$.

L'identité

$$\nabla^i (X Y^{p-q}) = \nabla^{i-1} [B_0 Y^{p-q} + B_1 (p-q) Y^{p-q-1} + B_2 (p-q)(p-q-1) Y^{p-q-2}],$$

où les coefficients B sont indépendants de q , conduit à cette expression de $\nabla^i Y^{p-q}$:

$$\begin{aligned} \nabla^i Y^{p-q} = & B_0 Y^{p-q} + B_1 (p-q) Y^{p-q-1} + B_2 (p-q)(p-q-1) Y^{p-q-2} + \dots \\ & + B_i (p-q)(p-q-1) \dots Y^{p-q-i}, \end{aligned}$$

B_0, B_1, B_2, \dots étant indépendants de q .

Dans le terme de rang $q+1$,

$$Y^q \sum \frac{f^{(q)}(u) - f^{(q)}(\nu)}{2n+1} Y_n^{p-q-1}$$

s'exprimera par un polynôme, tel que

$$a_0 Y^p + a_1 Y^{p-1} + a_2 Y^{p-2} + \dots,$$

où les coefficients a seront des polynômes en q , au plus de degré $2p'$.

L'ensemble du coefficient de $4\pi\rho\alpha^2\alpha^p$ est, à un facteur près, la différence, d'ordre p , de la suite formée par ces polynômes, quand on fait

successivement $q = 0, 1, 2, \dots$; la différence d'ordre p , de cette suite de termes est toujours nulle, car on a

$$p > 2p' + 1.$$

La démonstration précédente est applicable aux séries dérivées $\frac{\partial V_e}{\partial r}$, $\frac{\partial V_i}{\partial r}$.

4. Dans le cas des sphéroïdes de révolution, la coïncidence sur la surface du sphéroïde des valeurs de V_e , V_i et de $\frac{\partial V_e}{\partial r}$, $\frac{\partial V_i}{\partial r}$ entraîne celle de $\frac{\partial V_e}{\partial \theta}$, $\frac{\partial V_i}{\partial \theta}$.

Il y a à faire une remarque importante sur la démonstration ci-dessus pour établir l'accord des valeurs de certaines séries, pour les points de la surface du sphéroïde : on a tacitement supposé qu'il était indifférent de changer l'ordre des termes dans les séries ordonnées suivant les puissances de α , γ et les fonctions sphériques; on a supposé, autrement dit, qu'on avait affaire à des séries absolument convergentes.

D'autre part, si l'on veut avoir pour V_e et V_i des expressions en séries qui se prêtent aux opérations de l'Analyse, susceptibles d'être multipliées par d'autres séries, etc., on sait qu'une condition suffisante, sinon toujours nécessaire, est que les séries convergent absolument.

Nous tiendrons compte des remarques précédentes en concluant que :

Les séries

$$(12) \quad V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi\varrho X_n}{n+3} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{-1}^{+1} r^{n+3} X_n d\mu,$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} V_i = & \pi\varrho \int_{-1}^{+1} r^2 d\mu - \frac{2\pi\varrho r^2}{3} + 2\pi\varrho X_1 r \int_{-1}^{+1} r X_1 d\mu \\ & + 2\pi\varrho X_2 r^2 \int_{-1}^{+1} \log r X_2 d\mu \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\pi\varrho X_n}{2-n} r^n \int_{-1}^{+1} r^{2-n} X_n d\mu. \end{aligned} \right.$$

représenteront le potentiel du sphéroïde pour les points extérieurs et intérieurs respectivement, si les valeurs de $\frac{1}{r^{n+1}}, r^{n+3}, \dots$, développées en partant de l'équation

$$r = a(1 + \alpha\gamma),$$

étant substituées dans les expressions de V_e, V_i , la convergence absolue des séries est assurée.

Il convient d'observer dès maintenant que le paramètre α peut être choisi de différentes manières, et que l'étendue du champ de convergence des développements V_e et V_i dépend de ce choix. Les applications qui vont suivre éclaireront à cet égard.

3. Je vais prendre d'abord l'exemple connu d'un ellipsoïde de révolution dont la courbe méridienne est définie par l'équation

$$(14) \quad r = a \left(\frac{1+k}{1+k\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Occupons-nous d'abord du potentiel relatif aux points extérieurs.

On voit que le développement de V_e ne contiendra que les puissances impaires de $\frac{1}{r}$. Ensuite, d'après un résultat dû à Legendre (HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 84),

$$(15) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n} d\mu}{(1+k\mu^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2n+1} \frac{(-k)^n}{(1+k)^{n+\frac{1}{2}}};$$

d'où, M étant la masse du sphéroïde elliptique,

$$(16) \quad V_e = 3M \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{X_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(a^3 k)^n}{r^{2n+1}}.$$

Pour les points intérieurs, V_i s'arrête au terme en X_2 :

$$(17) \quad V_i = \pi \rho \int_{-1}^{+1} r^2 d\mu - \frac{2\pi^2 r^2}{3} + 2\pi \rho X_2 r^2 \int_{-1}^{+1} \log r X_2 d\mu.$$

La série (16) qui exprime V_e est certainement convergente si $k < 1$. Mais l'expression ci-dessus de V_e doit être développée suivant les puissances de k et les polynômes X_n , pour recevoir la forme utilisée dans les applications par Legendre, Laplace, etc., et il s'agit d'avoir une limite des valeurs de k , assurant la convergence absolue de la série double. Il n'y a pas lieu de s'occuper de V_i .

Un rapprochement s'offre de lui-même avec les expressions en série, de l'anomalie vraie et du rayon vecteur, ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne: elles sont convergentes quand l'excentricité e est inférieure à l'unité; mais, pour assurer la convergence absolue des séries doubles ordonnées suivant les puissances de e et les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne, Laplace a cherché la limite des valeurs de e (0,66...), qui font converger les séries des modules maxima des termes (').

Pour les valeurs du paramètre e ou k , inférieures aux valeurs limites, on a alors des séries doubles qui se prêtent, sans restrictions gênantes, aux opérations de l'Analyse.

Une première manière d'assurer la convergence absolue des séries doubles V_e et V_i (celle des séries dérivées sera assurée en même temps) serait de raisonner sur les expressions de V_e , V_i , dans lesquelles on remplacerait r et $\frac{1}{r}$, figurant en facteur, ou sous le signe d'intégration, par deux séries à termes positifs comprenant tous les termes des développements en séries de r et $\frac{1}{r}$.

Dans l'exemple, on serait ainsi conduit à poser la condition

$$\frac{k(1+k)}{1-k} < 1, \quad \text{d'où} \quad k < 0,414;$$

(') Voir une Note Sur le développement des coordonnées elliptiques (*Bulletin astronomique*, t. III).

de sorte que la réduction du champ de variation du paramètre serait ici relativement plus sensible que dans le cas du développement des coordonnées elliptiques.

Mais on peut changer de paramètre, et généralement quand les deux intégrales

$$\int_{-1}^{+1} [f(\mu, \alpha)]^{n+2} X_n d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} [f(\mu, \alpha)]^{-n+2} X_n d\mu, \quad [r = f(\mu, \alpha)],$$

où n est supposé très grand, s'expriment plus simplement en fonction d'un nouveau paramètre $\beta = \varphi(\alpha)$, il pourra être avantageux de changer de paramètre et de prendre β au lieu de α .

Dans l'exemple, si $\frac{k}{1+k} = \beta$ est pris comme nouveau paramètre, la convergence absolue de la série sera assurée si l'on a

$$\frac{\beta}{1-\beta} (1 + 2\beta) < 1.$$

A la valeur limite de β correspond $k = 0,58$; $\frac{k}{1+k}$ est le carré de l'excentricité de l'ellipse méridienne.

L'expression du potentiel employée par Bessel dans ses *Recherches sur le système de Saturne* (*Abhandlungen*, t. I; édition Engelmann) contient en effet le carré de l'excentricité au lieu du paramètre k . Pour la théorie de la figure des planètes, il n'y a pas d'avantage essentiel à choisir un autre paramètre que k .

6. Considérons les deux sphéroïdes, définis par les équations

$$(18) \quad \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{1+k\mu^2} + \frac{1+k'}{1+k'\mu^2} \right)$$

et

$$(19) \quad \frac{r^2}{a^2} = \left(\frac{1+k}{1+k\mu^2} \right) \left(\frac{1+k'}{1+k'\mu^2} \right);$$

k et k' sont des nombres positifs; $k' < k$.

Si l'on compare les deux sphéroïdes aux ellipsoïdes, ayant pour équations

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1 + \frac{k+k'}{2}}{1 + \frac{k+k'}{2}\mu^2} \quad \text{et} \quad \frac{r^2}{a^2} = \frac{(1+k)(1+k')}{1 + (k+k'+kk')\mu^2}$$

on trouve que, entre le pôle et l'équateur, le premier corps est déprimé relativement à l'ellipsoïde, tandis que le second corps, au contraire, est plus bombé que l'ellipsoïde. La première forme offre un intérêt spécial parce qu'elle se rencontre dans la théorie de la figure des planètes.

Recherchons d'abord la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{+1} X_{2n} \sin^{2m} \theta d\mu,$$

pour m entier et $\geq n$; pour $m < n$, I serait nulle.

L'égalité (15) peut s'écrire

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n} d\mu}{\left(1 - \frac{k}{1+k} \sin^2 \theta\right)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2n+1} (-k)^n (1+k).$$

Soit

$$\frac{k}{1+k} = \beta, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{\beta}{1-\beta}, \quad 1+k = \frac{1}{1-\beta}.$$

En développant suivant les puissances de β les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} X_{2n} d\mu + \frac{n+\frac{3}{2}}{1} \beta \int_{-1}^{+1} X_{2n} \sin^2 \theta d\mu \\ & + \frac{(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}{1 \cdot 2} \beta^2 \int_{-1}^{+1} X_{2n} \sin^4 \theta d\mu + \dots \\ & + \frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right) \dots \left(n+\frac{2m+1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \dots m} \beta^m \int_{-1}^{+1} X_{2n} \sin^{2m} \theta d\mu + \dots \\ & = (-1)^n \frac{2}{2n+1} \beta^n \left[1 + \frac{n+1}{1} \beta + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \beta^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

et, en égalant les coefficients de β^m dans les deux membres,

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{5}{2}\right) \cdots \left(n + \frac{2m+1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdots m} \int_{-1}^{+1} X_{2n} \sin^{2m} \theta d\mu \\ & = (-1)^n \frac{2}{2n+1} \frac{(n+1)(n+2) \cdots m}{1 \cdot 2 \cdots (m-n)}. \end{aligned} \right.$$

Arrivons maintenant aux intégrales qui figurent dans le développement du potentiel.

Soit, en particulier, l'intégrale

$$(21) \quad \int_{-1}^{+1} r^{2n+3} X_{2n} d\mu,$$

r étant donné par la formule (18) ou la formule (19).

Si l'on développe l'intégrale (21), suivant les puissances de $\beta = \frac{k}{1+k}$ et de $\beta' = \frac{k'}{1+k'}$ en remplaçant $1 + k\mu^2$ et $1 + k'\mu^2$ par

$$(1+k) \left(1 - \frac{k}{1+k} \sin^2 \theta\right) \quad \text{et} \quad (1+k') \left(1 - \frac{k'}{1+k'} \sin^2 \theta\right),$$

on voit que :

- 1° L'intégrale a le signe de $(-1)^n$, commun à tous les termes en β et β' ;
- 2° L'intégrale augmente si k' augmente et se rapproche de k ;
- 3° Pour $k' = k$, on sait calculer la valeur de l'intégrale.

On aura des séries triples, ordonnées suivant les puissances de β , β' et les polynômes de Legendre.

Le calcul des intégrales comprises dans la formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n} d\mu}{(1+k\mu^2)^v},$$

quand n et v sont des grands nombres, comparables entre eux, n'offre pas de difficultés; mais, pour la plus grande simplicité et d'après le motif

donné plus haut, nous considérons seulement les sphéroïdes elliptiques déprimés.

On trouve alors, sans faire de calculs nouveaux, que si

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\beta}{1-\beta} < 1 \quad (\text{point ext.}), \quad \rho^2 \frac{\beta}{1-\beta} < 1 \quad (\text{point int.}),$$

où $\frac{1}{\rho^2}$ et ρ^2 sont formés en partant de

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\beta + \beta\mu^2} + \frac{1}{1-\beta' + \beta'\mu^2} \right),$$

et remplaçant les termes par leurs modules maxima, la convergence absolue des séries triples est assurée.

Soient

$$\rho^2 = 1 + S = 1 + S' - S'';$$

$$S' = \frac{\beta + \beta'}{2} + \frac{\beta^2 + \beta'^2}{2} (1 + \mu^4) + \frac{\beta^3 + \beta'^3}{2} (1 + 3\mu^4) + \dots,$$

$$S'' = \frac{\beta + \beta'}{2} \mu^2 + \frac{\beta^2 + \beta'^2}{2} 2\mu^2 + \frac{\beta^3 + \beta'^3}{2} (3\mu^2 + \mu^6) + \dots$$

Dans le cas d'un point *intérieur*, la convergence sera *a fortiori* assurée si l'on remplace ρ^2 par $\frac{1}{1-2\beta}$; condition :

$$\frac{1}{1-2\beta} \frac{\beta}{1-\beta} < 1, \quad \text{d'où} \quad \beta < 0,29.$$

Dans le cas d'un point *extérieur*, il suffira de même de poser

$$\frac{(1+2\beta)^2}{1-2\beta} \frac{\beta}{1-\beta} < 1, \quad \text{d'où} \quad \beta < 0,22.$$

REMARQUE I. — Aux valeurs de β : 0,29 et 0,22, correspondent les valeurs 0,41 et 0,28 de $k = \frac{\beta}{1-\beta}$.

REMARQUE II. — Dans ce qui précède, on a assuré la convergence absolue des développements ordonnés suivant les puissances de β , β' et μ^2 . Rem-

place-t-on les puissances de μ par leur valeur au moyen des X_n , la convergence absolue des développements ordonnés suivant les polynômes X_n et les puissances de β et β' est démontrée.

7. Après avoir envisagé les formules du potentiel sous le rapport de leur application à la théorie de la figure de la Terre et des planètes, montrons que le problème général est susceptible d'une solution précise.

On admet que le sphéroïde possède un équateur et que l'expression de $\frac{1}{r^2}$ peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{1}{r^2} = C_0 (1 - k \cos^2 \theta) (1 - k' \cos^2 \theta) \dots;$$

les k sont positifs ou négatifs, mais inférieurs à l'unité.

Soit à évaluer, pour n très grand, l'intégrale

$$(22) \quad I = \int_{-1}^{+1} [(1 - k\mu^2)(1 - k'\mu^2)\dots]^{-\frac{2n+3}{2}} X_{2n} d\mu.$$

En partant de l'intégrale connue

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-qy^2} dy = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) q^{-\frac{2n+1}{2}},$$

on a, dans le cas de p facteurs,

$$\begin{aligned} & [(1 - k\mu^2)(1 - k'\mu^2)\dots]^{-\frac{2n+3}{2}} \\ &= \frac{1}{[\Gamma(n + \frac{3}{2})]^p} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots y^{2n+2} y'^{2n+2} \dots e^{-y^2 - y'^2} \dots e^{(ky^2 + k'y'^2 \dots)\mu^2} dy dy' \dots \end{aligned}$$

et

$$(23) \quad I = \frac{1}{[\Gamma(n + \frac{3}{2})]^p} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots y^{2n+2} y'^{2n+2} \dots e^{-y^2 - y'^2} \dots \int_{-1}^{+1} e^{a\mu^2} X_{2n} d\mu dy dy' \dots;$$

on pose, pour un moment,

$$a = ky^2 + k'y'^2 + \dots$$

Le calcul de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} e^{a\mu} X_{2n} d\mu$ s'effectue en développant l'exponentielle $e^{a\mu}$ et ayant égard aux formules (HEINE, Ouvrage cité, p. 85)

$$(2i+1)\mu^{2i} = 1 + 5 \frac{i}{i+\frac{3}{2}} X_2 + 9 \frac{i(i-1)}{(i+\frac{3}{2})(i+\frac{5}{2})} X_4 + \dots$$

$$+ (4n+1) \frac{i(i-1)\dots(i-n+1)}{(i+\frac{3}{2})(i+\frac{5}{2})\dots(i+\frac{2n+1}{2})} X_{2n} + \dots,$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} d\mu = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 d\mu = \frac{2}{2n+1},$$

il vient

$$\int_{-1}^{+1} e^{a\mu} X_{2n} d\mu$$

$$= \frac{a^n}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\dots(2n+\frac{1}{2})} \left[1 + \frac{n+\frac{1}{2}}{2n+\frac{3}{2}} a + \frac{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}{(2n+\frac{3}{2})(2n+\frac{5}{2})} \frac{a^2}{1.2} + \dots \right].$$

Mettons à la place de y, y', \dots d'autres variables :

$$y = \alpha u, \quad y' = \alpha' u, \quad \dots, \quad \alpha^2 + \alpha'^2 + \dots = 1$$

(dans le cas de trois quantités y, y', y'' , cela reviendrait à remplacer les coordonnées rectangulaires par le rayon vecteur et les trois cosinus directeurs; pour le cas général, voir HEINE, p. 460). Soient

$$dy dy' \dots = u^{p-1} J du d\alpha d\alpha' \dots,$$

$$\xi = k\alpha^2 + k'\alpha'^2 + \dots,$$

$$v = p(n+1) + \frac{p}{2};$$

effectuons l'intégration relativement à u de $u=0$ à $u=\infty$: on aura

$$(24) \left\{ I = A \int \int \dots \alpha^{2n+2} \alpha'^{2n+2} \dots \xi^n \left[1 + \frac{(n+\frac{1}{2})(n+v)}{2n+\frac{3}{2}} \xi \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+v)(n+v+1)}{(2n+\frac{3}{2})(2n+\frac{5}{2})} \frac{\xi^2}{1.2} + \dots \right] J d\alpha d\alpha' \dots; \right.$$

$$A = \frac{1}{[\Gamma(n+\frac{3}{2})]^p} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+\frac{3}{2})} \Gamma(n+v).$$

Enfin, à cause de

$$F(n + \nu, n + \frac{1}{2}, 2n + \frac{3}{2}, \xi) = \frac{\Gamma(2n + \frac{3}{2})}{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^n (1-t\xi)^{-n-\nu} dt,$$

où F désigne la série hypergéométrique de Gauss, I reçoit la forme

$$(25) \quad I = B \int_0^1 dt \int \dots \alpha^{2n+2} \alpha'^{2n+2} \dots t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^n \xi^n (1-t\xi)^{-n-\nu} J d\alpha d\alpha' \dots,$$

$$B = \frac{\Gamma(n + \nu)}{\Gamma(n + 1) [\Gamma(n + \frac{3}{2})]^p}.$$

Il s'agit donc d'évaluer l'intégrale multiple I , laquelle renferme un facteur élevé à une grande puissance. Laplace a donné les méthodes nécessaires pour cet objet (*Calcul des probabilités*, n° 28).

Le facteur en question est

$$(26) \quad (\alpha \alpha' \dots)^2 t (1-t) \xi (1-t\xi)^{-p-1} = P.$$

On cherche les valeurs de $t, \alpha, \alpha', \dots$ qui le rendent maximum, $\alpha, \alpha' \dots$ étant liés par la relation

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \dots = 1.$$

On a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{P}{\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \xi} k \alpha, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \alpha'} = \frac{P}{\alpha'} + \frac{\partial P}{\partial \xi} k' \alpha', \quad \dots,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{P}{\xi} + (p + 1) \frac{P t}{1 - t\xi}.$$

Les conditions pour le maximum s'écrivent

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \alpha'}}{\alpha'} = \dots, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

Si l'on pose les rapports égaux à $2 \frac{\partial P}{\partial \xi} u$, on a les équations

$$(27) \quad P + \frac{\partial P}{\partial \xi} k \alpha^2 = \frac{\partial P}{\partial \xi} u \alpha^2, \quad P + \frac{\partial P}{\partial \xi} k' \alpha'^2 = \frac{\partial P}{\partial \xi} u \alpha'^2,$$

et

$$(28) \quad (1 - 2t)(1 - t\xi) + (p + 1)\xi t(1 - t) = 0.$$

Des équations (27) il résulte aussitôt

$$(29) \quad \alpha^2 = \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial \xi}} \frac{1}{u - k}, \quad \alpha'^2 = \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial \xi}} \frac{1}{u - k'}, \quad \dots$$

et, à cause de

$$(30) \quad \xi = k\alpha^2 + k'\alpha'^2 + \dots, \\ \frac{k}{u - k} + \frac{k'}{u - k'} + \dots = \frac{\frac{\partial P}{\partial \xi}}{P} \xi.$$

Le second membre peut s'exprimer au moyen de u :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\xi}{P} = 1 + \frac{(p + 1)\xi t}{1 - \xi t} = \frac{t}{1 - t} \quad [\text{éq. 28}];$$

faisant la somme des équations (27),

$$pP + \frac{\partial P}{\partial \xi} \xi = \frac{\partial P}{\partial \xi} u, \quad \text{d'où} \quad u - \xi = p \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial \xi}} = p \xi \frac{1 - t}{t},$$

combinant ce résultat avec la condition (28),

$$(31) \quad u = -\frac{1 - 2t}{t^2}, \quad \left(\frac{1 - t}{t}\right)^2 = 1 - u, \quad \frac{1 - t}{t} = \sqrt{1 - u},$$

l'équation (30) devient

$$(32) \quad \frac{k}{u - k} + \frac{k'}{u - k'} + \dots = \frac{1}{\sqrt{1 - u}} \quad (u < 1).$$

Si l'on fait $\nu = \frac{1}{u}$, elle se transforme dans la suivante :

$$(33) \quad \frac{1}{\frac{1}{k} - \nu} + \frac{1}{\frac{1}{k'} - \nu} + \dots = \pm \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - \nu}};$$

le signe à mettre devant le radical est celui de ν .

Dans les équations (29), les valeurs de $\alpha^2, \alpha'^2, \dots$ sont essentiellement positives; ξ est du signe de u ; donc les seules racines u acceptables doivent tomber en dehors du segment de l'axe des x sur lequel on aurait représenté les valeurs des k . Rangeons les valeurs de $\frac{1}{k}$ par ordre de grandeur croissante, $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k'}$ étant respectivement les quantités négative et positive les plus voisines de zéro: ν ne pourra être compris qu'entre $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k'}$ et même entre $\frac{1}{k}$ et zéro d'une part, d'autre part entre 1 et $\frac{1}{k'}$. Il est facile de voir que dans chacun de ces intervalles il y a une racine ν et une seule.

Si tous les k sont positifs, ξ est positif, u et ν aussi: c'est donc la racine positive qu'il faut prendre; le contraire aurait lieu si tous les k étaient négatifs. En général, il faudra voir laquelle des deux racines ν_1 ou ν_2 donne la plus grande valeur au facteur P.

On a

$$P = \frac{1}{u-k} \frac{1}{u-k'} \cdots \left(\xi \frac{1-t}{t} \right)^p t(1-t) \xi (1-t\xi)^{-p-1}$$

et, après quelques simplifications,

$$P = \frac{1}{(p+1)^{p+1}} \frac{1}{1-k\nu} \frac{1}{1-k'\nu} \cdots \frac{u}{(1+\sqrt{1-u})^2}.$$

Pose-t-on

$$C = \frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(n+1)[\Gamma(n+\frac{3}{2})]^p} \frac{1}{(p+1)^{(p+1)n}},$$

on trouve que $\log C = f \log n + g$, f et g étant indépendants de n .

On conclut de là et de ce qui précède le théorème suivant :

La limite du rapport d'un terme au précédent dans la série du potentiel pour les points extérieurs est égale à

$$\frac{f(\mu^2)}{f(\nu)} \frac{u}{(1+\sqrt{1-u})^2}, \quad u = \frac{1}{\nu};$$

le sphéroïde a pour équation

$$\frac{1}{r^2} = C_0 f(\mu^2) = C_0 (1 - k\mu^2)(1 - k'\mu^2) \dots,$$

où k, k', \dots sont inférieurs à l'unité en valeur absolue; ν est celle des deux racines de l'équation

$$\frac{1}{\frac{1}{k} - \nu} + \frac{1}{\frac{1}{k'} - \nu} + \dots = \pm \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - \nu}} \begin{matrix} \nu \text{ positif} \\ \nu \text{ négatif} \end{matrix},$$

minima en valeur absolue, à laquelle correspond la plus grande valeur absolue de $\frac{1}{f(\nu)} \frac{u}{(1 + \sqrt{1-u})^2}$. Si tous les k ont le même signe, ν aura ce même signe.

Appliquons le théorème à l'ellipsoïde de révolution ayant pour équation

$$r^2 = a^2 \frac{1+k}{1+k\mu^2}.$$

L'équation en ν est ici

$$\frac{1}{-\frac{1}{k} - \nu} = -\frac{1}{\sqrt{\nu^2 - \nu}}.$$

On en déduit

$$\nu = -\frac{1}{k(k+2)}, \quad u = -k(k+2),$$

$$\frac{1}{f(\nu)} \frac{u}{(1 + \sqrt{1-u})^2} = \frac{1}{1 - k \frac{1}{k(k+2)}} \frac{-k(k+2)}{(k+2)^2} = -\frac{k}{1+k},$$

ce qui est d'accord avec la formule (15).

Pour les points intérieurs, on considérerait r^2 à la place de $\frac{1}{r^2}$; les valeurs de $\frac{1}{r^2}$ ou de r^2 étant développées en séries trigonométriques, puis décomposées en facteurs, on appliquerait l'analyse ci-dessus.

8. D'après le numéro précédent, on a le moyen, dans des cas étendus, de s'assurer de la convergence des deux séries représentant le potentiel à l'extérieur et à l'intérieur du corps, et ordonnées suivant les puissances décroissantes ou croissantes de la distance r .

Pour les points d'un même rayon, assez éloignés ou assez voisins de l'origine, la légitimité des développements est évidente. Mais les développements restent-ils valables jusqu'à la surface du corps; en d'autres termes, la série de Maclaurin (ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{r}$ ou de r), représente-t-elle le potentiel (à l'extérieur ou à l'intérieur du sphéroïde) du moment qu'elle est convergente?

Cette question m'a conduit à une étude *Sur le développement des fonctions par la série de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV). J'espère y avoir établi avec rigueur qu'une fonction $f(x)$ à développer suivant les puissances entières et positives de x étant donnée, il suffit de s'être assuré par un moyen quelconque que le développement est légitime dans un intervalle fini, pour $0 < x < a$, et que la fonction $f(x)$ ainsi que ses dérivées sont continues, pour que l'on puisse employer, sans autre discussion du reste, la série de Maclaurin.

Ce théorème est aussitôt applicable au potentiel : *Les séries ordonnées suivant les puissances décroissantes ou croissantes de r représentent le potentiel pour les points extérieurs ou intérieurs, jusqu'à la surface du corps, si elles sont convergentes.*

Ce résultat comprend évidemment, comme cas particulier, ce qui a été établi dans les premiers paragraphes du présent Mémoire.



ÉTUDES EXPÉRIMENTALES

SUR

L'ÉLASTICITÉ DYNAMIQUE ET STATIQUE DES FILS MÉTALLIQUES;

PAR M. MERCADIER.

Le présent travail avait été entrepris dans le but de vérifier certaines formules de Thermodynamique : il comportait d'abord l'étude de l'élasticité de fils métalliques au point de vue *statique* par la mesure des allongements élastiques obtenus sous l'action des tensions variables, et, simultanément, au point de vue *dynamique*, par la mesure des vibrations longitudinales des mêmes fils sous les mêmes tensions (¹).

Les mesures sont relatives à des fils de cuivre, d'acier, de platine, d'aluminium, d'or et d'argent de diamètre variant de 0^{mm},5 à 1^{mm} environ.

L'appareil qui servait à produire les allongements du fil en expérience était tout à fait analogue à celui de Wertheim; mais nous nous sommes attaché, comme on le verra, à mesurer avec beaucoup de précision la

(¹) La première Partie de ces recherches a été effectuée depuis le mois de novembre 1869 jusqu'au mois de juin 1870, sur les conseils et avec l'aide de M. Cornu, dans le laboratoire de l'École Polytechnique; la guerre, les événements qui ont suivi, et d'autres circonstances en ont fait différer la continuation.

Si je publie aujourd'hui la partie terminée, c'est que les déterminations qu'elle renferme ont paru, par le soin et la précision avec lesquels elles ont été faites, pouvoir être utiles aux physiciens, moins peut-être par les déterminations elles-mêmes que par la méthode d'enregistrement de vibrations très rapides.

longueur du fil observé, à perfectionner la mesure des allongements, à éviter, autant que possible, les variations de température et surtout des allongements permanents notables dus à l'imperfection de l'élasticité; mais, comme ils sont le plus souvent inévitables, nous en avons éliminé les effets par un système d'observations *croisées*, consistant à mesurer toujours la longueur du fil sous une certaine charge entre deux mesures faites sous la charge initiale, et à comparer la mesure intermédiaire à la moyenne des deux autres.

Quant à l'évaluation par une méthode graphique du nombre des vibrations longitudinales du fil, l'appareil était disposé de telle manière qu'on pût la faire aisément avec beaucoup de précision, et, immédiatement après, sans toucher au fil autrement que pour le dégager de la mâchoire qui fixait à la partie inférieure la longueur vibrante, procéder aux mesures d'allongement effectuées ainsi dans les mêmes conditions de température et de tension que les précédentes.

Voici d'ailleurs quelle était, en détail, la marche des expériences.

I.

MESURE DE L'ALLONGEMENT ÉLASTIQUE.

Le fil en expérience est passé à la filière pour être bien redressé; sa longueur est mesurée à moins de 1^{mm} et son poids déterminé à $\frac{1}{10}$ de milligramme près.

Il est pincé à la partie supérieure, dans une mâchoire en acier M fixée à un mur épais et par l'intermédiaire d'une lame de plomb pour éviter l'écrasement : un point de repère A est marqué à 1^{mm} au plus au-dessous de la mâchoire, et est constamment visé par un petit cathétomètre *c* posé sur un support fixé au mur qui supporte la mâchoire supérieure.

Le fil passe librement dans une nouvelle mâchoire M' fixée aussi au mur et avec laquelle on le pince comme dans la mâchoire supérieure, quand on veut le faire vibrer longitudinalement.

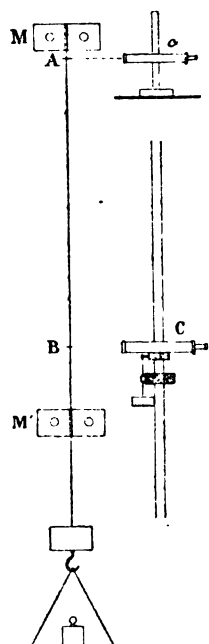
Un second point de repère B est marqué au-dessus de la seconde mâ-

choire; c'est un fragment de feuille d'or ou des grains d'antimoine collés au suif sur le fil.

L'extrémité du fil est fixée à une pince portant un plateau qu'on peut charger de poids.

Le fil est d'abord tendu en mettant des poids dans le plateau pendant vingt-quatre heures au moins, et l'on détermine la charge maxima qu'on

Fig. 1.



peut lui faire supporter sans qu'il en résulte un allongement permanent qui dépasse quelques centièmes de millimètre. On reste au-dessous de cette charge dans les expériences définitives.

Avant de commencer les mesures, on établit la Table de correction du niveau à bulle d'air d'un cathétomètre de Perrot, C, destiné à mesurer les allongements.

On évalue au cathétomètre, une fois pour toutes, la distance des deux mâchoires.

On place sur le plateau la charge initiale : on mesure au cathétomètre

la distance des deux repères A, C en la corrigeant par l'observation et avec la Table du niveau. On mesure avec le petit cathétomètre *c* fixé au mur la distance du repère A au bas de la mâchoire supérieure, distance qui sera également observée dans le courant et à la fin des expériences, pour s'assurer qu'elle n'a pas varié par suite d'un glissement du fil dans la mâchoire.

Le grand cathétomètre, après la mesure de AC, ne sert plus qu'à évaluer les *variations* de cette longueur sous des charges croissantes : la lunette n'est plus alors manœuvrée qu'à l'aide de la vis de rappel, laquelle porte un tambour divisé en 100 parties, dont la largeur est telle qu'on en peut aisément apprécier le $\frac{1}{10}$: le pas de la vis étant égal à 0^{mm},5, on évalue ainsi le $\frac{1}{2000}$ de millimètre. La variation totale de longueur n'a jamais dépassé 1^{mm} et l'observation est faite avec une lunette formant microscope, de 26^{cm} de foyer, assez rapprochée du fil : de cette manière la lunette se déplace bien parallèlement à elle-même, si bien que les variations de la bulle du niveau sont à peu près insensibles. Les observations sont alors extrêmement précises.

Le fil est enveloppé d'une gaine en carton pour éviter les variations de température observées avec un bon thermomètre à 0,1 de degré près. On n'admet que les expériences où la variation totale de température n'a pas dépassé 1° : dans ces conditions, des observations croisées éliminent l'effet des variations lentes de température.

Chaque mesure de la position du repère inférieure C est la moyenne de 3 pointés et de 3 lectures sur le tambour de la vis de rappel.

On produit les variations de longueur en ajoutant successivement des fractions égales de la charge totale déterminée d'avance : cette charge est généralement divisée en 6 parties au moins, quelquefois 8, 9 ou même 10.

Chaque observation comprend :

- 1° La détermination *a* du repère *c* avec la charge minima ;
- 2° La détermination *b* sous une portion *p* de la charge totale P ;
- 3° Une nouvelle détermination *a'* avec la charge minima.

Les nombres *a* et *a'* devraient être identiques s'il n'y avait pas d'allon-

gement autre que celui qui est dû à l'élasticité : en réalité, ils le sont souvent, mais pas toujours; seulement, dans ce dernier cas, leur différence est très petite. On en prend la moyenne et on la compare à b , de telle sorte que l'allongement correspondant à la charge p est représenté par

$$b = \frac{a + a'}{2}.$$

Les allongements élastiques totaux ont varié environ de 0^{mm},5 à 1^{mm} suivant les fils en expérience : la somme des effets de dilatation et des allongements permanents dus à l'imperfection de l'élasticité n'a atteint qu'une seule fois 2 pour 100 de l'allongement total, ainsi que l'indique le Tableau suivant :

FILS.	DIAMÈTRE approximatif.	ALLONGEMENT total.	VALEUR MOYENNE de la somme des allongements permanents et de la dilatation.	VARIATIONS de charge.
	mm	mm	mm	kg kg
Cuivre.....	1,0	0,90	0,003	10 à 20
Acier.....	0,5	0,95	0,001	5 à 10
Aluminium.....	0,8	0,52	0,007	2 à 4
Platine.....	0,65	0,46	0,004	2 à 5
Argent.....	1,0	0,58	0,009	2 à 5,200
Or.....	0,5	0,62	0,001	0 à 1

La charge initiale dans le cas du fil d'or était celle qui avait été nécessaire pour tendre le fil simplement.

Dans toutes les expériences on a trouvé que les allongements élastiques étaient bien proportionnels aux variations de charges.

Pour calculer l'allongement élastique par kilogramme, on a pris la moyenne composée des allongements obtenus dans les observations particulières. Connaissant la longueur totale observée du fil, toujours très voisine de 1^m, on en déduit l'allongement élastique par kilogramme et par mètre; puis, connaissant le poids de 1^m du fil, on a calculé l'allon-

gement par mètre sous l'action du poids du fil; soit ϵ cette quantité. La vitesse du son en mètres dans le fil, V , est donnée par

$$V = \sqrt{\frac{g \times 1000}{\epsilon}}.$$

II.

MESURE DU NOMBRE DES VIBRATIONS LONGITUDINALES.

Sur un madrier horizontal, placé derrière le fil environ à la moitié de sa longueur, est fixée une double règle métallique sur laquelle peut glisser un chariot tiré par un poids par l'intermédiaire d'une poulie. Le chariot porte à l'arrière un morceau de fer doux en prise avec un électro-aimant : à l'aide d'une manette placée à sa portée, l'observateur peut, de la main gauche, supprimer le courant de l'électro-aimant, pendant que, de la main droite, il fait vibrer longitudinalement, avec un tampon de peau enduit de colophane, le fil pincé entre les deux mâchoires, distantes d'environ 1^m, 30.

Une lame de glace recouverte de noir de fumée, fixée au chariot et entraînée dans son mouvement, passe sous un style en fil de laiton très mince, fixé à peu près au milieu de la longueur du fil, et qui inscrit sur la lame ses vibrations. En même temps, le style d'un diapason de 512 vibrations simples par seconde inscrit aussi ses vibrations.

L'inscription peut être faite deux ou trois fois sur la même lame qui, à cet effet, peut être soulevée le long de deux glissières.

Les vibrations du fil sont très nombreuses (de 1600 à 4000 par seconde suivant les fils), et leur amplitude est très petite : de là des difficultés pour les comparer exactement à celles du diapason chronographe.

Pour les surmonter, on place la lame de verre sur le banc d'une machine à diviser, de façon que la ligne médiane des vibrations, qu'on examine d'ailleurs au microscope, soit bien parallèle à l'axe de la vis de la

machine. On l'éclaire par-dessous par réflexion sur une bande de glace étamée, de sorte que les vibrations se détachent nettement en blanc sur le fond noir du noir de fumée. On trace alors avec le tracelet de la machine deux traits coupant les deux lignes qui renferment les vibrations du diapason et du fil, aux deux extrémités de chaque graphique. On compte ensuite successivement, en se servant du microscope, les nombres de vibrations n et N , comprises entre les deux traits, relatives au fil et au diapason : celles-ci sont au nombre de 40 à 60 sur chaque graphique. C'est peu sans doute ; mais cet inconvénient est racheté par la précision des mesures et le nombre des graphiques, qui, pour 6 fils, n'est pas moindre que 80 et qui permet ainsi de prendre des moyennes ;

$$\frac{n \times 512}{N}$$

donne le nombre des vibrations *simples* du fil par seconde pour le son fondamental : il suffit de le multiplier par la longueur vibrante du fil exprimée en mètres pour avoir la vitesse du son dans le fil exprimée en mètres. On peut ainsi comparer cette vitesse V' avec celle V qui est calculée d'après l'allongement élastique.

Le nombre et la fragilité des graphiques dont il vient d'être question rendent leur conservation difficile dans l'état où ils sont quand on vient de les faire. Voici un moyen très simple de les reporter sur du papier.

Pour cela, on recouvre le noir de fumée d'une couche de collodion mélangé de 2 pour 100 d'huile de ricin, comme on verse du collodion ordinaire sur une plaque de photographie. On laisse sécher, puis on plonge la lame de verre ainsi préparée dans un bain d'eau acidulée par quelques gouttes d'acide chlorhydrique. Si l'on a eu soin, dès que le collodion riciné est sec, de fendre avec un canif la pellicule le long des quatre côtés du rectangle formé par la lame de verre, cette pellicule se détache dans l'eau acidulée, en enlevant avec elle le noir de fumée, tel qu'il était sur la lame, sans altérer les sinuosités les plus fines des vibrations inscrites sur le graphique. On étale cette pellicule ; elle est assez ré-

sistante pour qu'on puisse la transporter et la laver dans de l'eau pure, puis on glisse au-dessous une bande de papier recouverte à l'avance de gomme arabique, et, appliquant l'un des bords de la pellicule du côté du noir de fumée sur l'un des bords de la bande de papier, on les retire simultanément du bain : la pellicule se colle d'elle-même sur le papier : quand le tout est sec, on a ainsi un graphique inaltérable, car le noir de fumée se trouve entre le papier et une couche de collodion ; on peut frotter dessus sans inconvénient.

Les deux figures ci-contre sont la reproduction exacte par la photographie de deux de ces graphiques, où chaque ligne représente une expérience particulière.

Le premier est relatif au fil d'aluminium de 1301^{mm} de longueur vibrante tendu par un poids de 4^{kg} . La première ligne comptée de ce graphique a donné 3951 vibrations par seconde ; la seconde 3941.

Le second est relatif au fil d'argent de 1302^{mm} de longueur vibrante tendu par un poids de 4^{kg} . Quatre lignes du graphique ont été comptées : la première donne 2148 vibrations par seconde, la seconde 2139, la troisième 2145 et la quatrième 2147.

Ces exemples suffisent pour montrer le degré de précision des expériences et des mesures.

III.

Outre les déterminations précédentes, on a mesuré la densité des fils sur lesquels on a opéré par la méthode de la balance hydrostatique, en les enroulant en couronne, les plaçant d'abord dans un vase rempli d'eau, chassant l'air adhérent avec une machine pneumatique, et les pesant enfin sans les retirer de l'eau.

De la mesure de la densité combinée avec les déterminations relatives à l'allongement élastique on a déduit par la formule ordinaire le coefficient d'élasticité *statique*. On pourra calculer le coefficient *dynamique* résul-

Fig. 2.

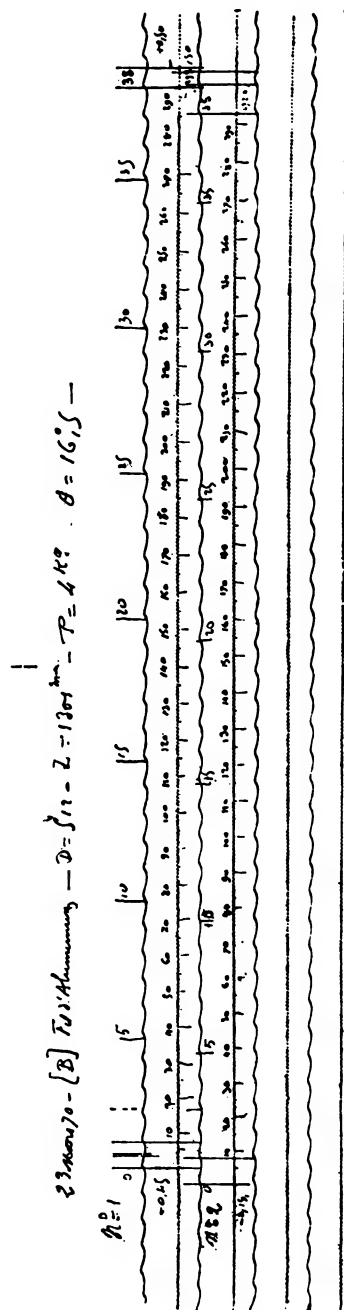
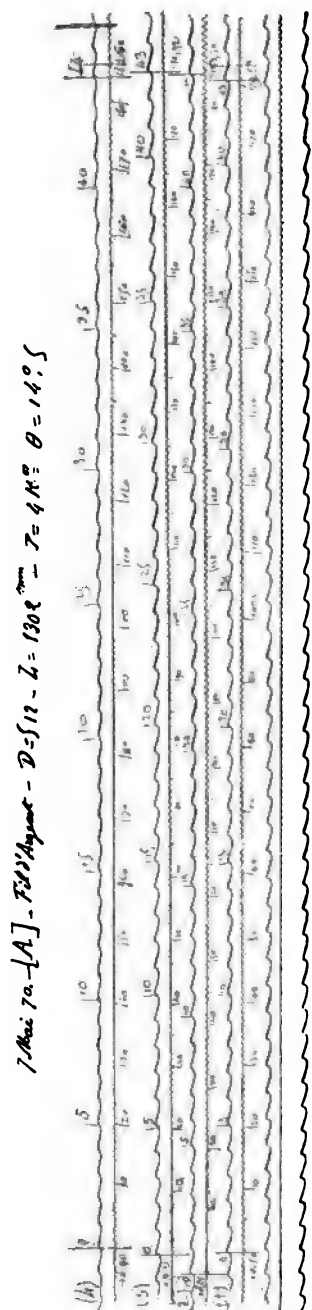


Fig. 3.



tant de la mesure de la vitesse du son par les vibrations longitudinales, à l'aide des données renfermées dans le Tableau ci-dessous, qui résume les résultats des expériences :

	POIDS de 1 ^m de fil.	DENSITÉ.	ALLONGEMENT moyen pour 1 ^m et 1 ^{kg} .	VITESSE DU SON		$\frac{V' - V}{\frac{V' + V}{2}}$	COEFFICIENT d'élasticité statique.
				déduite des vibrations [V'].	déduite de l'allongem ^t [V].		
Cuivre.....	^{gr} 7,8725	8,8912	^{mm} 0,0917759	$\left. \begin{array}{r} 3732^m \\ 3740 \\ 3735 \\ \hline 3736 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} 3691^m \\ 3678 \\ \hline 3684 \end{array} \right\}$	0,014	12306
Acier anglais	1,987	7,708	0,21401	$\left. \begin{array}{r} 4945 \\ 4931 \\ 4933 \\ \hline 4936 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} 4791 \\ 4803 \\ 4804 \\ \hline 4799 \end{array} \right\}$	0,028	18115
Platine.....	9,393	21,245	0,15165	$\left. \begin{array}{r} 2651 \\ 2641 \\ 2638 \\ \hline 2643 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} 2616 \\ 2624 \\ 2612 \\ \hline 2617 \end{array} \right\}$	0,01	14915
Aluminium.	1,4875	2,7286	0,26035	$\left. \begin{array}{r} 5154 \\ 5129 \\ 5140 \\ 5138 \\ 5140 \\ \hline 5140 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} 5071 \\ 5038 \\ 5018 \\ 5001 \\ 5036 \\ \hline 5033 \end{array} \right\}$	0,02	7046
Argent	7,0917	10,500	0,18533	$\left. \begin{array}{r} 2798 \\ 2799 \\ 2793 \\ \hline 2797 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} 2742 \\ 2727 \\ 2724 \\ \hline 2731 \end{array} \right\}$	0,024	7989
Or	3,71466	19,484	0,628614	$\left. \begin{array}{r} 2072 \\ 2076 \\ 2072 \\ \hline 2073 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} 2053 \\ 2044 \\ 2051 \\ \hline 2049 \end{array} \right\}$	0,01	8344

On voit, d'après les nombres renfermés dans les colonnes 5 et 6, que les vitesses déduites des vibrations sont toujours, ainsi que l'avait montré Wertheim, supérieures à celles que l'on a calculées d'après les allongements : elles diffèrent (colonne 7) de 1 à 3 pour 100 de leur valeur moyenne.

FIN DU LVIII^e CAHIER.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
SUR LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES CORPS, ET SPÉCIALEMENT DANS LES GAZ PARFAITS (suite); par M. <i>Hugoniot</i>	1
SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DU POTENTIEL DES SPHÉROÏDES DE RÉVOLUTION; par M. <i>O. Callandreau</i>	127
ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR L'ÉLASTICITÉ DYNAMIQUE ET STATIQUE DES FILS MÉTALLIQUES; par M. <i>Mercadier</i>	155

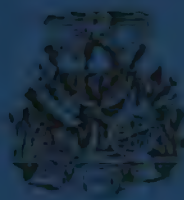


JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CRUÉE
PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CINQUANTE-NEUVIÈME CAHIER



PARIS.

GUTHRIE-VILLARS ET FILS, IMPRIMERS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE DES CONDUITES
ET DES ARTS ET MÉTIERS.

1880



JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PUBLIÉ
PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION
DE CET ÉTABLISSEMENT.

.....
CINQUANTE-NEUVIÈME CAHIER.
.....



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1889

Journal de l'École Polytechnique. — 59 Cahiers in-4, avec figures;
1794-1889..... 1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

VII ^e et VIII ^e , Chaque cahier.	8 fr.	» c.	XXXIII ^e	9 fr.	» c.
IX ^e comprenant la théorie des fonctions analytiques, par Lagrange.....	7	»	XXXIV ^e et XXXV ^e	10	»
XI ^e	12	»	XXXVI ^e et XXXVII ^e	10	»
XII ^e	12	»	XXXVIII ^e et XXXIX ^e	8	»
XIII ^e	8	»	XL ^e à XLIII ^e	10	»
XIV ^e	10	»	XLIV ^e à XLVIII ^e	12	»
XVI ^e et XVII ^e	8	»	XLIX ^e	12	»
XXI ^e et XXII ^e	8	»	L ^e	12	»
XXIII ^e	6	»	LI ^e	12	»
XXIV ^e	7	»	LII ^e	12	»
XXV ^e et XXVI ^e	8	»	LIII ^e	12	»
XXVII ^e	9	»	LIV ^e	12	»
XXVIII ^e	7	»	LV ^e	14	»
XXIX ^e et XXX ^e	5	»	LVI ^e	14	»
XXXI ^e	9	»	LVII ^e	14	»
XXXII ^e	5	»	LVIII ^e	10	»
			LIX ^e	12	»

Journal de l'École Polytechnique. — **Table des Matières** contenues dans les 37 premiers Cahiers, formant 21 Volumes, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4..... 2 fr.

— **Table des Matières** contenues dans les Cahiers XXXVIII^e à LVI^e, formant 16 Volumes, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4..... 1 fr. 50 c.

Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement, suivi de la liste des Élèves admis en 1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. MARIELLE. Vol. in-8..... 5 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au *Répertoire de M. Marielle*; par M. LE PRIEUR, Trésorier de l'École. Vol. in-8..... 3 fr.

MAR 29 1890

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SUR UNE CONDITION
DE BON FONCTIONNEMENT DES INSTALLATIONS MÉCANIQUES
COMPORTANT
DES TRANSMISSIONS PAR LIENS RIGIDES OU FLEXIBLES;

PAR M. H. LÉAUTÉ,

Répétiteur de Mécanique.

Les installations mécaniques établies d'après les règles ordinaires en usage dans la pratique ne fournissent pas toujours, une fois construites, le bon fonctionnement qu'on en attendait. Elles donnent fréquemment lieu à des mécomptes, surtout quand elles comportent des transmissions à longues portées et des masses animées de grandes vitesses, ce qui est, comme on le sait, un cas de plus en plus fréquent dans les applications.

On se trouve souvent alors en présence d'irrégularités de mouvement que rien ne faisait prévoir et qu'il est difficile ou même impossible de faire disparaître.

Bien qu'on ait étudié avec soin toutes les parties du réseau et assuré à chacune d'elles, aussi bien qu'au moteur, une régularité supérieure à celle ordinairement admise, bien qu'il n'y ait aucun vice de construction, aucun défaut de montage, il se produit en certains points de jonction des troubles inacceptables; les engrenages sont le siège de chocs dangereux,

de vibrations inadmissibles; les liens flexibles présentent des oscillations d'une amplitude exagérée.

Pour éviter avec certitude ces difficultés lorsqu'on établit un projet, pour y remédier quand on les rencontre dans une installation, il suffit de satisfaire à une condition qui n'a pas été indiquée jusqu'ici et que le présent travail a pour but de faire connaître.

Les considérations qui suivent permettront d'établir cette condition :

Dans les machines à vapeur, qui constituent aujourd'hui le moteur le plus employé, la valeur de la composante tangentielle de la poussée motrice sur l'arbre de la machine est loin d'être constante; il existe d'ordinaire des points morts où cette composante est nulle, et l'on a même souvent une contre-pression, conséquence de l'avance à l'admission. La suppression complète de l'impulsion du fluide moteur est ainsi réalisée à certaines périodes du mouvement, pendant lesquelles l'ensemble mécanique fonctionne sous sa seule inertie, sans être soumis à d'autres forces que les résistances de diverses natures qu'il doit vaincre. De là, des mouvements relatifs en arrière qui, nés de la machine, se transmettent dans tout le réseau et qui, aux points de jonction, sont capables d'engendrer les chocs dans les engrenages ou les oscillations inquiétantes dans les liens flexibles.

Pour éviter ces mouvements en arrière, il suffit évidemment que, même dans ce cas limite de la puissance nulle, le mouvement ne cesse jamais, pour chacune des portions du système, de se transmettre dans le sens normal, c'est-à-dire dans celui où il se transmet naturellement par l'action de la machine. En d'autres termes, il suffit qu'il n'y ait jamais de changement de sens dans les efforts que se communiquent les divers liens, quand on suppose la force motrice annulée.

Cette condition de non-changement de sens étant satisfaite dans les circonstances qui précèdent, le sera encore *a fortiori* alors que la composante tangentielle de la poussée due à la vapeur ne sera plus nulle; les mouvements relatifs en arrière, et les perturbations qui en sont la conséquence, ne seront plus possibles; le problème posé sera résolu.

La solution se met sous une forme pratique très simple, grâce à la considération de la *caractéristique cinématique* ⁽¹⁾.

Remarquons pour cela qu'on obtiendra la relation inconnue si, après avoir imaginé la suppression instantanée de l'action motrice, on exprime que l'accélération de chaque portion de l'ensemble dans le mouvement retardé qu'elle prend alors est supérieure à l'accélération de la portion qui précède et inférieure à celle de la portion qui suit; de cette manière, en effet, chaque partie du système mécanique se trouve poussée par la précédente, pousse la suivante, et le sens de l'effort en chaque point de jonction est bien le sens du mouvement produit par l'action du moteur.

Il est d'ailleurs entendu que, lorsque les points de jonction considérés sont en même temps des points de ramification où aboutissent des commandes différentes, la condition précédemment indiquée doit être remplie pour chacune des branches de transmission issues du point de jonction.

Nous n'avons plus qu'à traduire cette condition sous forme analytique; afin de bien préciser, nous supposerons d'abord qu'il s'agit d'un engrenage et nous étendrons sans peine ensuite le résultat trouvé au cas d'une jonction par lien flexible.

Désignons par N , le nombre de tours, par minute, en marche normale, de la roue menante; par R , son rayon; par \mathfrak{X} , la caractéristique cinématique rapportée à cette roue, c'est-à-dire le nombre de tours qu'elle ferait sous la seule action des résistances si l'on supprimait brusquement la puissance; par T , le temps pendant lequel elle tourne dans ces conditions; par γ , enfin, l'accélération du mouvement retardé ainsi défini, accéléra-

⁽¹⁾ Nous avons défini, sous ce nom de *caractéristique cinématique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dirigé par M. Jordan, p. 465; 1887), une constante qui joue un rôle vraiment fondamental dans toutes les questions que soulève le mouvement des machines, lorsque, abandonnant l'hypothèse purement fictive du mouvement uniforme, on aborde le seul cas qui ait de l'intérêt au point de vue pratique, celui du mouvement troublé.

La caractéristique cinématique d'un ensemble mécanique, rapportée à un arbre de cet ensemble, est le nombre de tours faits par cet arbre lorsque, en marche normale, on supprime brusquement l'arrivée du fluide moteur.

tion comptée sur la circonférence primitive de la roue. Nous représenterons par les mêmes notations, avec l'indice 2, les quantités analogues pour la roue menée.

Le mouvement que prend la roue menante, après la suppression de la force motrice, sous l'action de la vitesse qu'elle possédait et des résistances, peut être considéré comme étant uniformément retardé. En effet, d'une part, la composante tangentielle correspondant aux machines-outils varie faiblement dans le mouvement normal en raison du nombre de ces machines et du peu de force qu'elles consomment individuellement; d'autre part, les résistances passives de toute nature produites dans l'ensemble mécanique qui suit la roue sont, très sensiblement, indépendantes de la vitesse.

On aura, dès lors,

$$\frac{2\pi R_1 N_1}{60} = \gamma_1 T_1,$$

$$2\pi R_1 \mathfrak{R}_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 T_1^2;$$

d'où l'on déduit,

$$\gamma_1 = \frac{\pi R_1 N_1^2}{3600 \mathfrak{R}_1}.$$

Le même calcul, fait pour la roue menée, donne

$$\gamma_2 = \frac{\pi R_2 N_2^2}{3600 \mathfrak{R}_2},$$

et la condition

$$\gamma_1 < \gamma_2$$

devient, si l'on tient compte de ce que les nombres de tours N_1 et N_2 sont inversement proportionnels aux rayons R_1 et R_2 ,

$$\frac{N_1}{\mathfrak{R}_1} < \frac{N_2}{\mathfrak{R}_2},$$

condition qui devra avoir lieu pour chaque point de jonction et pour chaque branche de transmission.

Il est bien clair que, si la jonction, au lieu d'être faite par un engrenage,

était obtenue à l'aide d'un lien flexible, il suffirait, dans le calcul précédent, de remplacer les circonférences primitives des roues dentées par les circonférences des poulies et que l'on serait conduit identiquement au même résultat.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant qui constitue une nouvelle condition de bon fonctionnement dans les installations mécaniques comportant des transmissions :

Pour être assuré d'éviter dans un ensemble mécanique les changements relatifs de sens et les perturbations qui en résultent, il suffit que, pour chaque arbre, le rapport du nombre de tours faits par minute à la caractéristique cinématique aille en augmentant constamment à mesure qu'on s'éloigne de la machine.

Nous ferons d'ailleurs, au sujet de l'application de l'énoncé qui précède, une remarque qui paraîtra bien évidente à tous les praticiens : c'est qu'il conviendra de satisfaire largement à l'inégalité fournie par le théorème pour avoir toute sécurité.

Le raisonnement qui vient d'être exposé s'applique à un point de jonction quelconque, sauf au premier sur lequel agit directement la machine; pour celui-là, en effet, le calcul de l'accélération du mouvement en arrière ne peut plus être dirigé de la même manière; il faut tenir compte de la puissance de la machine, des variations que subit la force motrice, de la force vive des masses mises en mouvement; nous avons indiqué, dans un autre travail ⁽¹⁾, la condition suffisante pour que les mouvements relatifs en arrière soient évités dans la première jonction, et nous avons trouvé que le quotient $\frac{N}{\omega}$ de la machine, compté sur l'arbre du volant, devait être inférieur au quotient correspondant du premier pignon diminué du terme $9000 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{P}{F}$ où P est la puissance de la machine, en chevaux, à l'indicateur; F la force vive des masses mises en

⁽¹⁾ *Sur les trépidations qui peuvent se produire dans l'engrenage de commande d'une transmission actionnée par une machine à vapeur (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 4 février 1889).*

mouvement depuis le moteur jusqu'au premier pignon exclusivement ; $\frac{1}{k}$ la fraction de l'action tangentielle moyenne de la vapeur rapportée à la circonférence du volant et représentant le minimum de cette action.

En résumé, l'étude qui précède a mis en lumière le rôle fondamental que joue, pour chaque arbre, au point de vue des perturbations aux jonctions, le rapport de la vitesse à la caractéristique cinématique, c'est-à-dire le rapport du nombre de tours que l'arbre fait par minute en vitesse normale au nombre de tours qu'il serait capable de faire si l'action motrice cessait brusquement. C'est la valeur de ce rapport qui seule intervient et qui doit, pour qu'on ait toute sécurité, aller constamment en croissant à mesure qu'on s'éloigne de la machine.

L'application de cette règle donne lieu à une remarque qui présente de l'intérêt au point de vue pratique.

La condition trouvée devrait être remplie théoriquement pour chacune des portions de l'ensemble mécanique que l'on étudie, si petite qu'elle soit ; mais pratiquement il sera toujours possible, *a priori*, d'apercevoir quelle est la division à adopter pour obtenir des résultats vraiment utiles, quels sont les points de jonction dangereux où il est indispensable de s'assurer que cette condition est remplie. Dans toutes les autres parties qui fonctionnent à vitesses réduites, l'importance des effets dus aux changements possibles de sens sera presque toujours négligeable ; ce n'est que dans les portions du système mécanique animées de grandes vitesses ou portant des masses considérables que le calcul présentera de l'intérêt. On sait, en effet, que, pour les engrenages, les changements de sens se traduisent par des chocs qu'il faut éviter à tout prix dès que la force transmise est importante, et que, pour les transmissions à liens flexibles, ces changements de sens correspondent à des oscillations d'autant plus dangereuses que les portées sont plus grandes et que la masse du lien est moins capable, par elle-même, de régulariser le mouvement.

MÉMOIRE
SUR LES INVARIANTS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ET SUR LEURS APPLICATIONS;
PAR M. ROGER LIOUVILLE.

Les recherches exposées dans ce Mémoire concernent l'ensemble des équations différentielles de cette espèce

$$(1) \quad \frac{d^2\gamma}{dx^2} + a_1\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^3 + 3a_2\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + 3a_3\frac{d\gamma}{dx} + a_4 = 0,$$

où les coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 sont des fonctions quelconques de x et de γ . Cette étude est faite à l'aide des substitutions générales

$$(2) \quad x' = f(x, \gamma), \quad \gamma' = \varphi(x, \gamma)$$

et des expressions qu'elles laissent invariantes; mais tout résulte en substance de la liaison établie entre l'équation proposée et un système d'équations différentielles *linéaires*, qui ne cesse point de lui être associé dans les transformations (2).

En utilisant ce lien essentiel, un premier invariant a été obtenu, puis une série d'autres et, comme conséquence, le problème suivant s'est trouvé résolu dans les cas ordinaires :

Étant données deux équations telles que (1), reconnaître si elles sont réductibles l'une à l'autre par l'une des transformations (2) et, quand la réduction est possible, l'effectuer en réalité.

Toutefois, il existe des équations pour lesquelles la construction successive des invariants ne peut avoir lieu d'après la méthode générale; celle-ci n'aboutit alors qu'à des identités et doit subir de notables modi-

fications. Ces cas exceptionnels sont d'autant plus dignes d'examen qu'ils constituent en quelque sorte les singularités du type d'équations considéré et présentent d'ailleurs une simplicité particulière.

Le Chapitre II, consacré à ce sujet, donne les éléments nécessaires pour rapporter les équations (1), quels que soient leurs coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_4$, sans aucune restriction, à l'une des classes canoniques, indépendantes des substitutions (2) : c'est le problème énoncé d'abord et résolu dans les cas ordinaires.

Les applications de cette théorie à l'intégration elle-même sont l'objet du Chapitre III. La première d'entre elles et la plus étendue est relative aux équations dont l'ordre peut être abaissé, parce que leurs coefficients cessent, après certaines transformations, de renfermer l'une des variables.

J'indique les calculs, faciles à faire, qui permettent de caractériser les équations de cette catégorie et de les ramener à celle-ci

$$\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y^3 + 3\alpha_2 y^2 + 3\alpha_3 y + \alpha_4 = 0,$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_4$ sont des fonctions quelconques de x .

Les résultats qui suivent se rapportent aux équations d'un des types les plus simples; elles peuvent se grouper par couples, et celles d'un même couple s'intègrent à la fois; quelques-unes deviennent linéaires par une transformation appropriée. L'emploi des équations linéaires s'était offert déjà pour l'étude des lignes géodésiques sur les surfaces à courbure constante (*Journal de l'École Polytechnique*, LVII^e Cahier, 1887), mais la réduction est ici d'autre nature et les constantes arbitraires se réunissent dans l'intégrale d'une façon fort différente.

Ce sont encore des équations linéaires qui se présentent dans une troisième question, liée d'une manière intime à la signification géométrique ou mécanique des équations (1). Une digression indispensable conduit d'abord à rechercher la condition précise dont il dépend que ces équations répondent, sur une surface, à des lignes géodésiques ou, si l'on veut, aux trajectoires d'un point soumis à l'action d'un potentiel.

La distance des points infiniment voisins sur une surface s'exprime au

moyen de trois coefficients, qui déterminent aussi l'équation des lignes géodésiques; les quatre coefficients de cette dernière sont donnés alors par les formules de Gauss et doivent vérifier une condition spéciale. La complication de ces formules n'avait pas laissé apercevoir les relations linéaires auxquelles se rattache la condition demandée et qui en donnent visiblement le sens véritable.

De plus, la proposition bien connue, relative aux lignes géodésiques des surfaces qui admettent cet élément de longueur,

$$(3) \quad ds^2 = [f(u) - F(v)](du^2 + dv^2),$$

n'était d'aucun usage pour l'intégration des équations (1), car il eût fallu :

1° Reconnaître les équations différentielles correspondant à un élément du type (3) à travers leurs transformations,

2° Calculer cet élément et trouver les variables u et v par lesquelles il acquiert la forme réduite précédente.

Le premier point résulte immédiatement de l'analyse indiquée pour définir le groupe des équations géodésiques; le second est élucidé par ce théorème, conséquence directe de la même analyse :

Quand une équation différentielle représente les lignes géodésiques des surfaces correspondant à une expression, telle que (3), mais inconnue, la recherche de l'élément de longueur appartenant à ces surfaces dépend d'une équation différentielle, linéaire et du second ordre, qui donne aussi l'intégrale complète de l'équation proposée.

Dans ces applications, je me suis attaché à traiter les exemples les plus étroitement liés à la discussion générale de l'équation (1). Cette discussion même et, dans chaque cas, le moyen de choisir les variables les plus commodes sont, en résumé, les avantages obtenus par la construction des invariants relatifs aux substitutions (2).

J'ajouterai que l'utilité du système linéaire associé à l'équation (1) ne semble pas bornée aux problèmes concernant ces substitutions; j'ai eu à m'en servir d'une tout autre manière dans un travail qui sera joint à un prochain Mémoire.

CHAPITRE PREMIER.

Définition des équations différentielles considérées et du système linéaire associé. — Divers modes de détermination pour ce dernier. — Expressions invariantes et invariants proprement dits. — Formation d'un invariant de poids cinq. — Construction d'une série d'invariants qui s'en déduisent. — Équations canoniques dans le cas général.

§ I.

Les variables x et y étant liées par une relation non définie, soient

$$z, \quad z^{(1,0)}, \quad z^{(0,1)}$$

trois inconnues, assujetties à vérifier le système d'équations linéaires suivant

$$(1) \quad \begin{cases} dz - z^{(1,0)} dx - z^{(0,1)} dy = 0, \\ dz^{(1,0)} + (p''_{0,1} z^{(1,0)} + p''_{1,0} z^{(0,1)} + p''_0 z) dx \\ \quad + (p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z) dy = 0, \\ dz^{(0,1)} + (p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z) dx \\ \quad + (p_{0,1} z^{(1,0)} + p_{1,0} z^{(0,1)} + p_0 z) dy = 0, \end{cases}$$

dans lequel

$$p_{k,i}, \quad p'_{k,i}, \quad p''_{k,i}$$

sont, pour toutes les valeurs de leurs indices, des fonctions données de x et de y .

Si l'on voulait isoler z , il faudrait, en différentiant, former une équation linéaire, dont l'ordre est, en général, le troisième et s'abaisse au second par un choix particulier de la relation établie entre x et y . Voici comment on peut s'en convaincre.

De l'une des équations (1), je déduis

$$d^2 z - z^{(1,0)} d^2 x - z^{(0,1)} d^2 y - dz^{(1,0)} dx - dz^{(0,1)} dy = 0$$

et, eu égard aux deux autres,

$$(2) \quad \begin{cases} d^2 z + z^{(1,0)}(p''_{0,1} dx^2 + 2p'_{0,1} dx dy + p_{0,1} dy^2 - d^2 x) \\ \quad + z^{(0,1)}(p''_{1,0} dx^2 + 2p'_{1,0} dx dy + p_{1,0} dy^2 - d^2 y) \\ \quad + z(p''_0 dx^2 + 2p'_0 dx dy + p_0 dy^2) = 0. \end{cases}$$

Le but cherché est donc atteint quand la relation précédente, jointe à la première du système (1),

$$dz - z^{(1,0)} dx - z^{(0,1)} dy = 0,$$

ne permet pas de calculer $z^{(1,0)}$, $z^{(0,1)}$, ce qui exige

$$(3) \quad \begin{cases} dx d^2 y - dy d^2 x + dy(p''_{0,1} dx^2 + 2p'_{0,1} dx dy + p_{0,1} dy^2) \\ \quad - dx(p''_{1,0} dx^2 + 2p'_{1,0} dx dy + p_{1,0} dy^2). \end{cases}$$

L'équation (2) devient ensuite

$$(4) \quad \begin{cases} dx d^2 z - dz d^2 x + dz(p''_{0,1} dx^2 + 2p'_{0,1} dx dy + p_{0,1} dy^2) \\ \quad + z dx(p''_0 dx^2 + 2p'_0 dx dy + p_0 dy^2) = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$(4') \quad \begin{cases} dy d^2 z - dz d^2 y + dz[p''_{1,0} dx^2 + 2p'_{1,0} dx dy + p_{1,0} dy^2] \\ \quad + z dy[p''_0 dx^2 + 2p'_0 dx dy + p_0 dy^2] = 0. \end{cases}$$

En conséquence, étant donnée une équation différentielle de cette espèce

$$(5) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0,$$

dans laquelle a_1, a_2, \dots, a_4 dépendent à volonté de x et de y , on lui peut associer un système semblable à (1) et la correspondance a lieu comme entre ce système (1) et l'équation (3), pourvu qu'on prenne

$$(6) \quad \begin{cases} p_{0,1} = a_1, & 2p'_{0,1} - p_{1,0} = 3a_2, \\ p''_{0,1} - 2p'_{1,0} = 3a_3, & -p''_{1,0} = a_4. \end{cases}$$

Ces conditions, qui n'entraînent pas la détermination complète du système (1), sont manifestement indépendantes du choix des variables, d'après la signification qu'on leur a trouvée.

Au reste, ayant représenté par ζ une fonction des deux variables x et y , et par

$$\zeta^{(i,k)} = \frac{\partial^{i+k} \zeta}{\partial x^i \partial y^k}$$

ses dérivées des divers ordres, l'ensemble des expressions différentielles

$$\begin{aligned} \zeta^{(2,0)} + p'_{0,1} \zeta^{(1,0)} + p''_{1,0} \zeta^{(0,1)} + p''_0 \zeta &= p''(\zeta); \\ \zeta^{(1,1)} + p'_{0,1} \zeta^{(1,0)} + p'_{1,0} \zeta^{(0,1)} + p'_0 \zeta &= p'(\zeta), \\ \zeta^{(0,2)} + p_{0,1} \zeta^{(1,0)} + p_{1,0} \zeta^{(0,1)} + p_0 \zeta &= p(\zeta) \end{aligned}$$

se transforme par les substitutions générales

$$x_i = f(x, y), \quad y_i = \varphi(x, y)$$

en même temps que le système (1) et de la même manière.

Il est clair que les combinaisons linéaires suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial p(\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial p'(\zeta)}{\partial y} + [p'_{1,0} p(\zeta) + (p'_{0,1} - p_{1,0}) p'(\zeta) - p_{0,1} p''(\zeta)] = \Sigma \epsilon_{k,i} \zeta^{(i,k)}, \\ \frac{\partial p''(\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial p'(\zeta)}{\partial x} + [p'_{0,1} p''(\zeta) + (p'_{1,0} - p''_{0,1}) p'(\zeta) - p''_{1,0} p(\zeta)] = \Sigma \epsilon'_{k,i} \zeta^{(i,k)} \end{cases}$$

renferment, avec ζ , ses dérivées du premier ordre seulement. Les coefficients $\epsilon_{k,i}$, $\epsilon'_{k,i}$, qu'elles servent à définir et dont voici l'expression

$$(8) \quad \begin{cases} \epsilon_{k,i} = \frac{\partial p_{k,i}}{\partial x} + p_{k,i-1} - \frac{\partial p'_{k,i}}{\partial y} - p'_{k-1,i} + p'_{1,0} p_{k,i} + (p'_{0,1} - p_{1,0}) p'_{k,i} - p_{0,1} p'_{k,i}, \\ \epsilon'_{k,i} = \frac{\partial p'_{k,i}}{\partial y} + p'_{k-1,i} - \frac{\partial p_{k,i}}{\partial x} - p_{k,i-1} - p''_{1,0} p_{k,i} + (p'_{1,0} - p''_{0,1}) p'_{k,i} + p'_{0,1} p'_{k,i}, \end{cases}$$

tiennent une place essentielle dans ces recherches.

Après avoir fixé entre x et y une équation à volonté, je considère pour z trois déterminations

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3$$

distinctes, c'est-à-dire sans relation linéaire entre elles, et pour $z^{(1,0)}$, $z^{(0,1)}$ les déterminations correspondantes $z_1^{(1,0)}$, $z_1^{(0,1)}$, $z_2^{(1,0)}$, ...; le déterminant

$$(9) \quad \delta = \Sigma \pm z_1 z_2^{(1,0)} z_3^{(0,1)},$$

dont la différentielle est donnée par

$$(10) \quad d\delta = -\delta[(p'_{0,1} + p'_{1,0})dx + (p'_{0,1} + p_{1,0})dy],$$

est une fonction des deux variables x et y , indépendante de la relation supposée entre elles, si cette condition

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial y}(p'_{0,1} + p'_{1,0}) = \frac{\partial}{\partial x}(p'_{0,1} + p_{1,0})$$

est remplie; en vertu des formules (8), elle s'exprime aussi par l'égalité

$$(12) \quad \varepsilon'_{0,1} = \varepsilon_{1,0},$$

et il est évident qu'elle traduit une propriété du système (1) sur laquelle le choix des variables n'influe en aucune manière.

Lorsqu'elle a lieu, les équations (6) et (10) peuvent être écrites ainsi

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{0,1} = a_1, \quad p'_{0,1} = a_2 + \frac{\partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y}, \quad p''_{0,1} = a_3 + \frac{2 \partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x}, \\ p_{1,0} = \frac{2 \partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} - a_2, \quad p'_{1,0} = \frac{\partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} - a_3, \quad p''_{1,0} = -a_4; \end{array} \right.$$

de plus, avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2(a_1 a_3 - a_2^2) &= \alpha, \\ \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 - a_2 a_3 &= \alpha', \\ \frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2(a_2 a_4 - a_3^2) &= \alpha'' \end{aligned}$$

et celles-ci

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} - a_2 \frac{\partial \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} + \alpha \delta^{-\frac{1}{3}} = A(\delta^{-\frac{1}{3}}), \\ \frac{\partial^2 \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x \partial y} + a_2 \frac{\partial \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} - a_1 \frac{\partial \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} + \alpha' \delta^{-\frac{1}{3}} = A'(\delta^{-\frac{1}{3}}), \\ \frac{\partial^2 \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} - a_4 \frac{\partial \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} + \alpha'' \delta^{-\frac{1}{3}} = A''(\delta^{-\frac{1}{3}}), \end{cases}$$

les relations (8) fournissent, pour déterminer p_0, p'_0, p''_0 , ces expressions simples

$$(15) \quad \begin{cases} (\rho_0 - \varepsilon_{0,1}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A(\delta^{-\frac{1}{3}}), & (p'_0 + \varepsilon'_{0,1}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A'(\delta^{-\frac{1}{3}}), \\ (\rho'_0 + \varepsilon_{1,0}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A'(\delta^{-\frac{1}{3}}), & (p''_0 - \varepsilon'_{1,0}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A''(\delta^{-\frac{1}{3}}), \end{cases}$$

qu'il est utile de mentionner.

Chaque intégrale des équations (1) satisfait à une identité de cette espèce

$$q_{0,1} z^{(1,0)} + q_{1,0} z^{(0,1)} + q_0 z = \text{const.},$$

pourvu que les trois fonctions $q_{0,1}, q_{1,0}$ et q_0 soient définies par un système d'équations différentielles

$$(16) \quad \begin{cases} dq_{0,1} = (p''_{0,1} q_{0,1} + p'_{0,1} q_{1,0} - q_0) dx + (p'_{0,1} q_{0,1} + p_{0,1} q_{1,0}) dy, \\ dq_{1,0} = (p''_{1,0} q_{0,1} + p'_{1,0} q_{1,0}) dx + (p'_{1,0} q_{0,1} + p_{1,0} q_{1,0} - q_0) dy, \\ dq_0 = (p''_0 q_{0,1} + p'_0 q_{1,0}) dx + (p'_0 q_{0,1} + p_0 q_{1,0}) dy, \end{cases}$$

dont les coefficients, comme l'on voit, sont donnés quand même la relation supposée entre x et y n'est pas connue.

D'ailleurs, après un changement arbitraire de ces variables, les groupes (1) et (16) ne cessent point de se correspondre comme auparavant; mais, en général, ils ne sont pas de même espèce, car, sans perdre la faculté de remplacer x et y par d'autres variables, à volonté, on peut regarder q_0 et z comme jouant le même rôle particulier dans les deux systèmes; pour

le dernier, ce sont alors les quantités $p''_0 q_{0,1} + p'_0 q_{1,0}$ et $p'_0 q_{0,1} + p_0 q_{1,0}$ qui se comportent comme le faisaient dans le premier $z^{(1,0)}$ et $z^{(0,1)}$.

Or, en examinant les différentielles $dz^{(1,0)}$ et $dz^{(0,1)}$, on remarque l'égalité des coefficients qui multiplient dx dans l'une, dy dans l'autre : une égalité analogue n'a lieu pour les différentielles suivantes

$$d(p''_0 q_{0,1} + p'_0 q_{1,0}), \quad d(p'_0 q_{0,1} + p_0 q_{1,0}),$$

rattachées de la même manière aux équations (16), que si l'on établit les deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial p'_0}{\partial y} + p'_{1,0} p_0 + (p'_{0,1} - p_{1,0}) p'_0 - p_{0,1} p''_0 &= 0, \\ \frac{\partial p''_0}{\partial y} - \frac{\partial p'_0}{\partial x} + p'_{0,1} p''_0 + (p'_{1,0} - p''_{0,1}) p'_0 - p'_{1,0} p_0 &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(17) \quad \varepsilon_4 = 0, \quad \varepsilon'_0 = 0,$$

et, d'après leur signification qui vient d'être indiquée, il est certain qu'elles constituent un ensemble invariant. C'est un résultat qu'on déduirait aussi fort aisément des identités (7).

Les relations (17) et (12) sont les seules que je doive supposer satisfaites, sans nulle exception.

§ II.

Le système linéaire associé à une équation différentielle telle que celle-ci

$$(1) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3$$

n'est pas entièrement défini par les considérations précédentes. Pour achever de le connaître, il resterait à choisir

$$\varepsilon_{0,1}, \quad \varepsilon'_{0,1}, \quad \varepsilon'_{1,0} \quad \text{et} \quad \partial,$$

qui jusqu'à présent demeurent arbitraires; mais il ne semble pas qu'une détermination plus précise et générale de ce système soit indispensable. Il y a cependant pour l'obtenir un moyen que je vais indiquer ici, parce qu'il n'implique aucune hypothèse sur l'équation proposée (1) et possède, d'ailleurs, de nombreux avantages.

Quand le système associé à (1) ne contient pas la fonction z elle-même, le changement des variables ne l'y peut introduire; les relations

$$(2) \quad p_0 = 0, \quad p'_0 = 0, \quad p''_0 = 0$$

forment donc un groupe invariant; elles donnent la définition complète que l'on cherchait, pourvu que δ soit connu; or il sera prouvé plus loin que rien n'empêche de le choisir à volonté parmi les invariants de poids égal à 1 et, cela fait, la correspondance est établie d'une façon définitive entre l'équation proposée et le système linéaire associé.

J'arrive maintenant aux invariants de l'équation (1); ils se déduisent de quelques identités faciles à démontrer.

D'abord, les expressions (14, § 1), où l'on remplace $\delta^{-\frac{1}{3}}$ par une indéterminée ψ , vérifient deux équations, semblables à (7), mais n'offrant dans leurs seconds membres aucune dérivée de cette fonction, en sorte qu'elles peuvent ainsi s'écrire

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial A(\psi)}{\partial x} - \frac{\partial A'(\psi)}{\partial y} - [a_1 A''(\psi) - 2a_2 A'(\psi) + a_3 A(\psi)] = -L_2 \psi, \\ \frac{\partial A''(\psi)}{\partial y} - \frac{\partial A'(\psi)}{\partial x} + [a_2 A''(\psi) - 2a_3 A'(\psi) + a_4 A(\psi)] = L_1 \psi, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(4) \quad \begin{cases} L_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{2\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_2 \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{2\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) + a_1 \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right), \\ L_1 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3a_2 a_4 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) \\ \quad - 3a_3 \left(\frac{2\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 \right) - a_4 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3 \right); \end{cases}$$

enfin les relations (17, § I),

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon'_0 = 0$$

entraînent

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_{0,1}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{1,0}}{\partial y} - [p_{0,1} \varepsilon'_{1,0} + (p'_{0,1} - p_{1,0}) \varepsilon_{1,0} - p'_{1,0} \varepsilon_{0,1}] - I_2 = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_{1,0}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon'_{1,0}}{\partial y} + [p'_{0,1} \varepsilon'_{1,0} + (p''_{0,1} - p'_{1,0}) \varepsilon_{1,0} - p''_{1,0} \varepsilon_{0,1}] + I_1 = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon_{0,1} \delta^{-\frac{1}{3}})}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}})}{\partial y} - (a_1 \varepsilon'_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}} + 2a_2 \varepsilon_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}} + a_3 \varepsilon_{0,1} \delta^{-\frac{1}{3}}) - I_2 \delta^{-\frac{1}{3}} &= 0, \\ \frac{\partial(\varepsilon_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}})}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon'_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}})}{\partial y} + (a_2 \varepsilon'_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}} + 2a_3 \varepsilon_{1,0} \delta^{-\frac{1}{3}} + a_4 \varepsilon_{0,1} \delta^{-\frac{1}{3}}) + I_1 \delta^{-\frac{1}{3}} &= 0, \end{aligned}$$

ce qu'un calcul très simple établit.

Ces remarques étaient nécessaires pour la solution du problème suivant :

Avec les trois expressions, déjà introduites au § I,

$$\begin{aligned} p(\zeta) &= \zeta^{(0,2)} + p_{0,1} \zeta^{(1,0)} + p_{1,0} \zeta^{(0,1)} + p_0 \zeta, \\ p'(\zeta) &= \zeta^{(1,1)} + p'_{0,1} \zeta^{(1,0)} + p'_{1,0} \zeta^{(0,1)} + p'_0 \zeta, \\ p''(\zeta) &= \zeta^{(2,0)} + p''_{0,1} \zeta^{(1,0)} + p''_{1,0} \zeta^{(0,1)} + p''_0 \zeta, \end{aligned}$$

on demande :

1° De construire deux équations linéaires

$$(6) \quad g(\zeta) = p(\zeta) + h p'(\zeta), \quad g'(\zeta) = p''(\zeta) + h' p'(\zeta),$$

liées par une identité du premier ordre, où elles entrent seules ;

2° De trouver la condition à laquelle il faut astreindre a_1, a_2, \dots, a_4 , pour rendre la construction possible.

Il est clair d'abord que l'identité cherchée doit se confondre avec celle-ci,

$$(7) \quad \frac{\partial g'(\zeta)}{\partial y} - \frac{h' \partial g(\zeta)}{\partial x} + (p_{0,1} + h p'_{0,1}) h' g'(\zeta) - (p'_{1,0} + h' p'_{1,0}) g(\zeta) = 0,$$

qui seule est admissible. Par suite, h et h' ont des valeurs inverses,

$$(8) \quad hh' = 1,$$

et la dernière satisfait à la relation

$$(9) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{h' \partial h'}{\partial y} + a_1 h'^3 + 3a_2 h'^2 + 3a_3 h' + a_4 = 0,$$

d'après laquelle une intégrale particulière de l'équation (1) est définie par la formule

$$(10) \quad dy = h' dx;$$

comme d'ailleurs le premier membre de (7) est visiblement égal à l'expression

$$(h' \varepsilon_{0,1} - \varepsilon'_{0,1}) \zeta^{(1,0)} + (h' \varepsilon_{1,0} - \varepsilon'_{1,0}) \zeta^{(0,1)},$$

afin qu'il s'évanouisse il faut avoir

$$(11) \quad h' \varepsilon_{0,1} - \varepsilon'_{0,1} = 0, \quad h' \varepsilon_{1,0} - \varepsilon'_{1,0} = 0.$$

Il en résulte, à cause du système (5) et de l'équation (10),

$$(12) \quad L_1 dx + L_2 dy = 0.$$

En conséquence, le problème proposé n'est possible que si l'équation différentielle précédente est une des intégrales de (1), ce que l'on exprime par la condition

$$(13) \quad \begin{cases} L_2 \left(L_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} - L_2 \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) + L_1 \left(L_2 \frac{\partial L_1}{\partial y} - L_1 \frac{\partial L_2}{\partial y} \right) \\ - a_1 L_1^3 + 3a_2 L_1^2 L_2 - 3a_3 L_1 L_2^2 + a_4 L_2^3 = 0. \end{cases}$$

Cette condition d'ailleurs est suffisante; car elle signifie que, le système (11) ayant lieu, les deux relations (5) cessent d'être distinctes, en sorte que, les inconnues $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{1,0}$, $\varepsilon'_{1,0}$ satisfaisant à l'ensemble des relations (5) et (11), l'identité (7) est, comme on le voit, démontrée.

L'équation (13) est invariante, d'après les calculs d'où elle est sortie; son premier membre est une fonction algébrique et entière des coefficients a_1, a_2, \dots, a_4 et de leurs dérivées. Je le représenterai par v_5 et, puisque les substitutions générales

$$(14) \quad x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

appliquées à l'équation différentielle étudiée,

$$dx d^2y - dy d^2x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0,$$

ne permettent point d'établir l'égalité

$$v_5 = 0,$$

à moins qu'elle ne se soit auparavant présentée d'elle-même, ces transformations doivent multiplier l'expression de v_5 par une puissance de la seule quantité,

$$\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} = D,$$

qui ne puisse, dans aucune hypothèse, s'évanouir. Je dis alors que v_5 est un *invariant relatif*, ayant pour *poids* l'exposant de D qui lui correspond; l'invariant est dit *absolu*, quand ce poids est nul; une substitution simple,

$$x = x', \quad y = cy',$$

met en facteur de l'invariant la constante c , élevée à une puissance marquée par son poids, dont la valeur s'obtient ainsi.

Elle est égale à 5 dans le cas actuel, ce qui achève de justifier la conclusion suivante :

L'équation différentielle (1) admet un invariant relatif de poids cinq, déterminé par la formule

$$(15) \quad \begin{cases} v_5 = L_2 \left(L_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} - L_2 \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) + L_1 \left(L_2 \frac{\partial L_1}{\partial y} - L_1 \frac{\partial L_2}{\partial y} \right) \\ \quad - a_1 L_1^3 + 3a_2 L_1^2 L_2 - 3a_3 L_1 L_2^2 + a_4 L_2^3. \end{cases}$$

§ III.

Il y a, en ce qui concerne les invariants de l'équation différentielle proposée, une distinction essentielle à faire.

Je ferai d'abord remarquer que le déterminant défini au § I,

$$\delta = \Sigma \pm z_1 z_2^{(1,0)} z_3^{(0,1)},$$

se change, par la substitution

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

en ce produit

$$\delta' = \delta \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) = \delta D.$$

C'est donc un invariant relatif, de poids égal à l'unité; il arrive seulement que son expression n'est pas donnée en fonction de a_1, a_2, \dots, a_4 et de leurs dérivées. Le nom d'invariants *proprement dits* sera réservé à ceux qui dépendent, comme v_s , des seules quantités explicitement connues et s'obtiennent sans aucune intégration. Ce sont, en général, ces derniers qu'il convient d'introduire et la raison en est évidente; mais il est pourtant des questions où les invariants de même espèce que δ jouent un rôle nécessaire : les suivants, qui se rattachent d'une manière directe aux recherches déjà présentées, semblent mériter une mention particulière. J'ai dit comment on peut concevoir le système linéaire, associé à l'équation différentielle proposée, de telle façon qu'un nouveau choix des variables ne puisse en rien modifier leur liaison. La fonction z , cela est clair, est alors un invariant absolu; on aperçoit encore sans peine qu'avec les inconnues du système (16, § I) se forme un covariant, linéaire et très simple,

$$(1) \quad \delta(q_{1,0} dx - q_{0,1} dy) = dq,$$

dont le poids est nul.

Enfin, le premier membre de l'équation (12, § II) constitue aussi un

covariant linéaire et la substitution déjà employée,

$$(2) \quad x' = x, \quad y = cy',$$

fait connaître son poids, qui est égal à 1.

J'imagine, en effet, que, dégageant de toute condition l'équation différentielle proposée, on écrive

$$(3) \quad L_1 dx + L_2 dy = \mu d\xi,$$

ce qui est toujours permis : il est manifeste que ξ est un invariant absolu, μ un invariant relatif, du poids indiqué par la substitution (2).

Ce résultat donne le moyen de composer une série indéfinie d'invariants proprement dits; car, pour obtenir, par exemple, que l'on ait

$$\mu = \nu_5^{\frac{1}{5}},$$

il faudrait satisfaire à l'équation invariante

$$(4) \quad L_1 \frac{\partial \nu_5}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \nu_5}{\partial x} + 5\nu_5 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) = 0,$$

puisque, d'après l'identité (3), l'équation suivante a lieu

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{L_1}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L_2}{\mu} \right) = 0;$$

on en conclut, comme on l'a vu, que l'expression

$$(6) \quad \nu_7 = L_1 \frac{\partial \nu_5}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \nu_5}{\partial x} + 5\nu_5 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right),$$

premier membre de l'équation (4), est un invariant relatif; une vérification immédiate montre ensuite que son poids est 7.

Le même raisonnement entraîne évidemment cette conséquence générale :

A chaque invariant ν_m , ayant pour poids le nombre entier m , un autre

invariant, de poids $m + 2$, correspond par la formule

$$(7) \quad \nu_{m+2} = L_1 \frac{\partial \nu_m}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \nu_m}{\partial x} + m \nu_m \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right).$$

Au reste, cette proposition s'établit aussi d'une façon directe et facile : car, après une substitution arbitraire

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

un invariant ν_m s'est changé en

$$\nu'_m = \nu_m D^m,$$

μ en $\mu' = \mu D$; il en résulte que l'expression

$$\nu_{m+2} = L_1 \frac{\partial \nu_m}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \nu_m}{\partial x} + m \nu_m \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right)$$

est alors devenue la suivante

$$\nu'_{m+2} = \mu D \left(\frac{\partial \xi}{\partial x'} \frac{\partial \nu'_m}{\partial y'} - \frac{\partial \xi}{\partial y'} \frac{\partial \nu'_m}{\partial x'} \right) + m \nu_m D^m \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x'} \frac{\partial \xi}{\partial y'} - \frac{\partial \mu'}{\partial y'} \frac{\partial \xi}{\partial x'} \right),$$

c'est-à-dire celle-ci

$$\begin{aligned} \nu'_{m+2} = & \mu D^{m+2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \nu_m}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \nu_m}{\partial x} \right) + m D^{m+1} \nu_m \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial D}{\partial x} \right) \\ & + m D^{m+2} \nu_m \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + m \nu_m \mu D^{m+1} \left(\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial D}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

dont l'identité avec le produit

$$\nu_{m+2} D^{m+2}$$

est visible.

J'ai maintenant réuni tous les éléments nécessaires à l'étude de l'équation proposée

$$(8) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dx^2 dy + a_4 dx^3 = 0,$$

dans les cas ordinaires.

Voici en effet deux invariants absolus

$$(9) \quad \nu_7 \nu_3^{-\frac{7}{5}}, \quad \nu_9 \nu_3^{-\frac{9}{5}},$$

qui se déduisent des relations précédentes. A moins qu'ils ne soient pas des fonctions distinctes de x et de y , on les peut choisir pour variables nouvelles, en posant

$$(10) \quad x' = \nu_7 \nu_3^{-\frac{7}{5}}, \quad y' = \nu_9 \nu_3^{-\frac{9}{5}};$$

par cette transformation, l'équation (8) prend une forme invariante ou, si l'on veut, canonique; ses coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_4$ sont alors des invariants absolus proprement dits et, comme ils sont au nombre de 4, il existe entre eux deux relations identiques; ces relations

$$(11) \quad \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0, \quad \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$$

caractérisent les différentes classes entre lesquelles se partagent les équations du type (7) et, pour s'en convaincre, il suffit de procéder ainsi :

Les identités (11) étant résolues, par exemple de cette manière,

$$(12) \quad \alpha_1 = \Psi_1(\alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_4 = \Psi_4(\alpha_2, \alpha_3),$$

je remplace les variables x et y par

$$(13) \quad x' = \alpha_2, \quad y' = \alpha_3.$$

La définition seule des invariants employés montre que :

1° La transformée de l'équation (8) par la substitution (12) est invariante;

2° Elle peut s'écrire

$$(14) \quad \begin{cases} dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + dy'^3 \Psi_1(x', y') \\ + 3x' d'^2 dx y' + 3y' dy' dx'^2 + \Psi_4(x', y') dx'^3 = 0 \end{cases}$$

et, par suite, est entièrement connue, quand le système (11) l'est lui-

même. C'est dire que, si l'on groupe en une classe unique toutes les équations, du type (7), qui se changent l'une dans l'autre par l'une des substitutions

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

à chaque système d'identités (11) répond une classe déterminée, comme on le voulait établir.

CHAPITRE II.

Étude des premiers cas exceptionnels. — Divers types d'équations pour lesquelles les invariants absolus dont on avait d'abord fait usage sont des constantes. — Construction des invariants quand la méthode du Chapitre I n'en fait plus connaître aucun. — Discussion complète. — Expression générale des formes canoniques pour des classes très étendues d'équations différentielles.

§ IV.

Lorsque les invariants absolus

$$(1) \quad t_7 = \nu_7 \nu_5^{-\frac{7}{5}}, \quad t_9 = \nu_9 \nu_5^{-\frac{9}{5}}$$

sont liés par une relation où n'entrent point x et y , l'analyse précédente cesse d'être applicable; il n'est plus permis alors de substituer ces fonctions aux variables primitives, et, pour obtenir l'équation canonique, d'autres moyens deviennent nécessaires.

Au reste, l'ensemble des invariants déduits de ν_5 par l'équation (7, § III) est sujet à la même difficulté. Que l'on pose, en effet, sans désigner l'indice m ,

$$(2) \quad t_m = \nu_m \nu_5^{-\frac{m}{5}},$$

et de l'équation citée l'on conclura

$$t_m \nu_5^{\frac{m}{5}} = L_1 \frac{\partial}{\partial y} (t_{m-2} \nu_5^{\frac{m-2}{5}}) - L_2 \frac{\partial}{\partial x} (t_{m-2} \nu_5^{\frac{m-2}{5}}) + (m-2) t_{m-2} \nu_5^{\frac{m-2}{5}} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right)$$

ou bien, après une réduction immédiate,

$$(3) \quad [5t_m - (m-2)t_7 t_{m-2}] v_s^{\frac{2}{5}} = 5 \left(I_1 \frac{\partial t_{m-2}}{\partial y} - I_2 \frac{\partial t_{m-2}}{\partial x} \right).$$

Or, ayant par hypothèse

$$(4) \quad t_9 = f(t_7),$$

la relation (3), où l'on donne à m les valeurs 9 et 11, exige celle-ci

$$(5) \quad 5t_{11} - 9t_7 t_9 = f'(t_7) (5t_9 - 7t_7^2),$$

qui exprime t_{11} en fonction de t_7 ; t_{13} , t_{15} se calculent de la même manière, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que la série entière des invariants

$$t_m$$

ne peut contenir deux éléments distincts.

Mais j'ai remarqué déjà que, dans la formule

$$(6) \quad L_1 dx + L_2 dy = \mu d\xi,$$

figure, avec un invariant absolu ξ , un invariant relatif μ , de poids égal à 1; soit

$$(7) \quad \mu = \lambda v_s^{\frac{1}{5}},$$

λ étant donc un invariant nouveau, de poids nul. La relation (5, § III) détermine le multiplicateur μ^{-1} et se confond avec la suivante

$$\frac{\partial}{\partial y} (I_1 v_s^{-\frac{1}{5}} \lambda^{-1}) - \frac{\partial}{\partial x} (I_2 v_s^{-\frac{1}{5}} \lambda^{-1}) = 0;$$

d'où il résulte

$$(8) \quad 5 \left(I_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y} - I_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \lambda t_7 v_s^{\frac{2}{5}} = 0;$$

d'ailleurs, en vertu de (3), cette identité

$$(9) \quad (5t_0 - 7t_1^2)\nu_3^{\frac{2}{3}} = 5 \left(L_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} - L_2 \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)$$

est satisfaite; or la comparaison des équations (8) et (9) donne lieu de conclure

$$(10) \quad \left(L_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) (5t_0 - 7t_1^2) + \lambda t_1 \left(L_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} - L_2 \frac{\partial t_1}{\partial x} \right) = 0,$$

et, comme il y a, selon l'hypothèse, une relation de cette nature,

$$(11) \quad \frac{t_1}{5t_0 - 7t_1^2} = - \frac{F'(t_1)}{F(t_1)},$$

le rapport

$$\frac{\lambda}{F(t_1)}$$

doit vérifier l'équation connue

$$L_1 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{F(t_1)} \right] - L_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda}{F(t_1)} \right] = 0,$$

par laquelle toutes les fonctions de ξ sont définies.

Parmi ces fonctions, le choix à faire est à volonté, la formule (6) n'imposant aucune condition sur ce point; en particulier, rien n'empêche de prendre

$$(12) \quad \lambda = F(t_1);$$

de plus, évidemment,

$$(13) \quad L_1 = \mu \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad L_2 = \mu \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

c'est-à-dire, à cause de (12),

$$(14) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{L_1 \nu_3^{-\frac{1}{3}}}{F(t_1)}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{L_2 \nu_3^{-\frac{1}{3}}}{F(t_1)}.$$

L'invariant ξ est donc obtenu. Il est, en général, distinct de t_1 et ne cesse

de l'être, d'après (10), que si

$$\lambda = F_1(\xi)$$

ou bien

$$(15) \quad 5t_9 - 7t_7^2 = 0.$$

Dans le premier cas, $v_3^{-\frac{1}{3}}$ serait un multiplicateur de l'équation différentielle

$$(6') \quad L_1 dx + L_2 dy = 0$$

et, en conséquence,

$$v_7 \doteq 0,$$

ce qui entraîne *a fortiori* la relation (15). Excluant donc l'unique exception qu'elle représente, je puis substituer t_7 et ξ aux variables primitives : l'équation proposée devient ainsi canonique ; ses coefficients, qui sont des invariants absolus, ne renferment pas la fonction ξ elle-même, mais ses dérivées, dont le système (14) donne explicitement l'expression.

Il reste à étudier les équations pour lesquelles

$$5t_9 - 7t_7^2 = 0$$

et, par suite aussi, en vertu de (10),

$$(16) \quad t_7 = \tilde{F}(\xi).$$

Par cette dernière formule, on voit qu'on peut supposer

$$(17) \quad L_1 = \mu \frac{\partial t_7}{\partial x}, \quad L_2 = \mu \frac{\partial t_7}{\partial y},$$

et, comme

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} v_3 &= L_2 \left(L_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} - L_2 \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) + L_1 \left(L_2 \frac{\partial L_1}{\partial y} - L_1 \frac{\partial L_2}{\partial y} \right) \\ &\quad - a_1 L_1^3 + 3a_2 L_1^2 L_2 - 3a_3 L_1 L_2^2 + a_4 L_2^3, \end{aligned} \right.$$

il s'en déduit

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_3 = \mu^3 & \left[\frac{\partial t_1}{\partial y} \left(\frac{\partial t_1}{\partial x} \frac{\partial^2 t_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial t_1}{\partial y} \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial t_1}{\partial x} \left(\frac{\partial t_1}{\partial y} \frac{\partial^2 t_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial t_1}{\partial x} \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - a_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^3 + 3a_2 \left(\frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial t_1}{\partial y} - 3a_3 \frac{\partial t_1}{\partial x} \left(\frac{\partial t_1}{\partial y} \right)^2 + a_4 \left(\frac{\partial t_1}{\partial y} \right)^3 \right], \end{aligned} \right.$$

de sorte que l'expression entre parenthèses

$$(20) \quad s_2 = \nu_3 \mu^{-3}$$

est un invariant relatif, de poids 2. Si le produit

$$s_2 \nu_3^{-\frac{2}{3}}$$

n'est pas une fonction de t_1 , ni t_1 égal à une constante, ces deux invariants permettent de calculer une équation canonique, comme précédemment; sinon, soit

$$s_2 \nu_3^{-\frac{2}{3}} = \mathcal{F}_1(t_1);$$

d'après la relation (20),

$$(21) \quad \mu = \nu_3^{\frac{1}{3}} \mathcal{F}_1^{-\frac{1}{3}}(t_1)$$

et, puisque $t_1 = \mathcal{F}(\xi)$, $\nu_3^{-\frac{1}{3}}$ est l'un des multiplicateurs de l'équation (6'), ce qui exige

$$\nu_7 = 0.$$

Toutes les recherches sont donc limitées aux cas dans lesquels t_1 est une constante ou bien s'évanouit; leur étude est l'objet du paragraphe suivant.

§ V.

Je suppose d'abord t_1 différent de zéro et je conserve les notations dont j'ai déjà fait usage.

Lorsqu'on prend pour variables nouvelles

$$(1) \quad x' = \lambda, \quad y' = \xi,$$

en affectant d'un accent ce qui se rattache à l'équation ainsi transformée, la relation invariante

$$L_1 dx + L_2 dy = \lambda \nu_s^{\frac{1}{5}} d\xi$$

entraîne

$$(2) \quad L'_1 = 0, \quad L'_2 = x' \nu_s^{\frac{1}{5}};$$

mais, comme L'_1 est nul, voici simplement l'expression de ν'_s ,

$$\nu'_s = \alpha'_4 L_2^3,$$

de laquelle il résulte

$$(3) \quad \alpha'_4 x'^3 = \nu_s^{\frac{2}{5}}.$$

Or, d'après la relation (8) du paragraphe précédent,

$$t_7 \nu_s^{\frac{1}{5}} = 5 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right);$$

de plus,

$$\nu_s^{\frac{1}{5}} = \nu_s^{\frac{1}{5}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right);$$

on en conclut

$$\nu_s^{\frac{1}{5}} = \frac{5}{t_7} = \text{const.}$$

Je puis donc écrire

$$(4) \quad \nu'_s = c^{-3}, \quad t_7 = 5c;$$

par conséquent,

$$(5) \quad \alpha'_4 = c^{-2} x'^{-3}, \quad L'_2 = c^{-1} x',$$

et la quantité c est une constante.

J'indique comment se ferait, dans le cas actuel, le calcul de λ et ξ .

Tout invariant ν_i , de poids égal à l'unité, fait connaître un invariant absolu par la formule

$$\nu = \int_k^y \int_h^x \nu_i dx dy,$$

où h et k sont des constantes quelconques. En particulier, que l'on prenne

$$(6) \quad v = \int_k^y \int_h^x v^{\frac{1}{3}} dx dy;$$

h', k' étant les valeurs de x', y' qui répondent à $x = h, y = k$, en vertu des relations (4) et (5) on doit avoir

$$(7) \quad v = \int_k^{y'} \int_h^{x'} c^{-1} dx' dy' = c^{-1} (x' - h') (y' - k'),$$

et l'équation (7, § III) montre qu'un invariant relatif, de poids 2, s'en déduira de cette manière

$$v_2 = L_1 \frac{\partial v}{\partial y} - L_2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

le quotient

$$v_2 v^{\frac{2}{3}},$$

qui est encore un invariant absolu, a pour expression

$$(8) \quad v_2 v^{\frac{2}{3}} = -c^2 L_2' \frac{\partial v}{\partial x'} = -x' (y' - k')$$

et il suffit d'éliminer x' entre (7) et (8), ce qui se fait ainsi

$$v + c^{-1} v_2 v^{\frac{2}{3}} = -c^{-1} h' (y' - k'),$$

pour avoir, sous cette forme

$$(9) \quad v + c^{-1} v_2 v^{\frac{2}{3}} = \text{const.},$$

une intégrale de l'équation différentielle

$$L_1 dx + L_2 dy = 0;$$

y' et ensuite x' sont par ce moyen déterminés.

Mais, pour achever l'étude de l'équation proposée

$$(10) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0,$$

en séparant les cas vraiment distincts, le point est de n'employer que des invariants proprement dits.

A cet effet, je remarque d'abord que, par les transformations générales

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

le premier membre de l'équation (10) se change en ce produit

$$(11) \quad \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) (dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + a'_1 dy'^3 + 3a'_2 dy'^2 dx' + 3a'_3 dy' dx'^2 + a'_4 dx'^3), \right.$$

en sorte qu'il est lui-même un covariant, de poids -1 .

Soit δh une constante arbitraire, infiniment petite; les résultats précédemment démontrés permettent de regarder aussi l'équation

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx \\ & 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 + v_5 (L_1 dx + L_2 dy)^3 \delta h = 0 \end{aligned} \right.$$

comme covariante de la proposée; c'est dire que les mêmes invariants leur appartiennent. Celui qui est, pour l'équation (12), ce que v_5 était pour (10) renferme les quatre premières puissances de δh . Leurs coefficients sont manifestement des invariants relatifs, de même poids que v_5 , et qui contiennent différemment a_1, a_2, \dots, a_4 avec leurs dérivées.

J'applique ces observations lorsque t_7 est une constante. Pour le faire d'une façon commode, il convient d'adopter les variables (1); l'équation (12) se réduit alors à celle-ci

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + (a'_1 + \delta a'_1) dy'^3 \\ & + 3a'_2 dy'^2 dx' + 3a'_3 dy' dx'^2 + a'_4 dx'^3 = 0, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle j'ai posé

$$(14) \quad \delta a'_1 = c x'^3 \delta h;$$

de plus, les variations de L'_1, L'_2 , quand l'équation primitive est rem-

placée par (13), s'obtiennent aisément; leurs expressions

$$(14') \quad \delta L'_1 = -3(cx')^{-1} \delta h, \quad \delta L'_2 = 3c \frac{\partial}{\partial x'} (x'^2 - a'_3 x'^3) \delta h$$

font connaître les coefficients des différentes puissances de δh dans l'invariant tel que ν'_s , attaché à l'équation (13).

Le premier de ces coefficients,

$$\frac{\delta \nu_s}{\delta h} = \nu_s^{(1)},$$

est donné par la formule suivante

$$(15) \quad \nu_s^{(1)} = 3c^{-3} \frac{\partial}{\partial x'} (4x' - 3a'_3 x'^2);$$

il en résulte une série d'invariants $\nu_7^{(1)}, \nu_9^{(1)}, \dots$, qui se calculent par la relation

$$(16) \quad \nu_{m+2}^{(1)} = L_1 \frac{\partial \nu_m^{(1)}}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \nu_m^{(1)}}{\partial x} + m \nu_m^{(1)} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right),$$

semblable à (7, § III).

Les invariants absolus

$$(17) \quad \nu_m^{(1)} \nu_s^{-\frac{m}{s}} = t_m^{(1)},$$

dont ils sont la source, vérifient une équation tout analogue à (3, § IV) et obtenue par les mêmes procédés,

$$(18) \quad [5t_{m+2}^{(1)} - m t_7 t_s^{(1)}] \nu_m^{\frac{2}{s}} = 5 \left(L_1 \frac{\partial t_m^{(1)}}{\partial y} - L_2 \frac{\partial t_m^{(1)}}{\partial x} \right).$$

En l'utilisant, la méthode expliquée au § IV permet de discuter les cas exceptionnels :

1° Si les deux invariants absolus $t_7^{(1)}, t_s^{(1)}$ sont liés par une relation différente de l'identité

$$t_7^{(1)} - t_7 t_s^{(1)} = 0;$$

2° Quand cette identité est satisfaite.

Il échappe seulement à cette analyse le cas où $t_s^{(1)}$ est une constante. Ce dernier, d'après (15), exige que la condition

$$(19) \quad a'_3 x'^2 - c_1 x' = Y$$

soit remplie, c_1 étant une constante connue, Y une fonction de y' encore indéterminée.

J'ai recours, dans cette hypothèse, à une nouvelle série d'invariants; l'un de ceux-ci est le coefficient de ∂h^2 dans l'expression, pareille à v_s , appartenant à l'équation (12), et voici comment on peut l'écrire,

$$(20) \quad v_s^{(2)} = 3^3 (c x')^{-1} \left[c^{-2} a'_2 - \left(x'^2 \frac{\partial a'_3}{\partial x'} + a'_3 x' - \frac{4}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x'} (x'^2 - a'_3 x'^3) \right];$$

les autres s'en déduisent par la formule générale

$$(21) \quad v_{m+2}^{(2)} = L_1 \frac{\partial v_m^{(2)}}{\partial y} - L_2 \frac{\partial v_m^{(2)}}{\partial x} + m v_m^{(2)} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right),$$

dont j'ai déjà indiqué l'origine. Les invariants absolus

$$(22) \quad t_m^{(2)} = v_m^{(2)} v_s^{-\frac{m}{5}}$$

permettent d'achever, comme précédemment, l'étude de l'équation (10), à moins que $t_s^{(2)}$ soit une constante. Mais ceci, selon la relation (20), n'est pas admissible; car il faudrait imaginer, avec la condition (19), la suivante

$$c^{-2} a'_2 + \frac{4}{3} (1 - c_1) x'^2 + [Y(1 - c_1) + c^{-4} 3^{-3} t_s^{(2)}] x' - \frac{Y}{3} (3Y + 4) = 0,$$

ce qui, en vertu du système (2), (5),

$$L'_1 = 0, \quad L'_2 = c^{-1} x', \quad a'_1 = c^{-2} x'^3,$$

implique une contradiction facile à vérifier.

Il reste à examiner le cas exclu des recherches précédentes et pour lequel ν_7 est nul.

L'invariant absolu ξ , qui s'obtient alors par une quadrature

$$(23) \quad \int \nu_5^{-\frac{1}{2}} (L_1 dx + L_2 dy) = \xi,$$

peut remplacer l'une des variables, par exemple y ; à cet effet, je pose

$$y' = \xi.$$

Dans l'équation différentielle soumise à cette substitution

$$(24) \quad dx d^2 y' - dy' d^2 x + a_1 dy'^3 + 3a_2 dy'^2 dx + 3a_3 dy' dx^2 + a_4 dx^3 = 0,$$

le dernier coefficient a_4 est manifestement un invariant relatif, de poids 2, et, par conséquent, la relation

$$(25) \quad L_1 \frac{\partial x'}{\partial y} - L_2 \frac{\partial x'}{\partial x} + a_4 = 0$$

définit un invariant absolu x' . Introduit au lieu de x , ce dernier change l'équation (24) en une autre, invariante,

$$(26) \quad dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + a'_1 dy'^3 + 3a'_2 dy'^2 dx' + 3a'_3 dy' dx'^2 + a'_4 dx'^3 = 0.$$

D'ailleurs, après ces transformations, L_1 , L_2 , ν_5 sont devenus

$$L'_1 = 0, \quad L'_2 = \nu'_5, \quad \nu'_5 = a'_1 L'^3_2;$$

en outre, à cause de (25),

$$L'_2 = a'_1,$$

ce qui entraîne

$$(27) \quad \nu'_5 = L'_2 = a'_1 = 1.$$

Ayant ainsi déterminé un ensemble de conditions canoniques, je reviens à l'équation (24) qui ne renferme qu'explicitement a_1 , a_2 , ..., a_4 , ou

leurs dérivées, et je considère le système linéaire

$$(28) \begin{cases} dz - z^{(1,0)} dx - z^{(0,1)} dy' = 0, \\ dz^{(1,0)} + (p''_{0,1} z^{(1,0)} + p''_{1,0} z^{(0,1)} + p''_0 z) dx + (p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z) dy' = 0, \\ dz^{(0,1)} + (p'_{0,1} z^{(1,0)} + p'_{1,0} z^{(0,1)} + p'_0 z) dx + (p_{0,1} z^{(1,0)} + p_{1,0} z^{(0,1)} + p_0 z) dy' = 0, \end{cases}$$

qui lui est associé (§ I).

σ étant une fonction arbitraire de y' et de x , soit

$$(29) \quad t = z^{(1,0)} + \sigma z.$$

Les transformations de l'équation proposée (10) ne peuvent faire figurer $z^{(0,1)}$ dans l'expression de t , car y' est un invariant absolu, de sorte que, dans le système (28), la variable x peut seule changer. Or

$$(30) \quad \begin{cases} dt = z^{(0,1)} [\sigma dy' - (p'_{1,0} dy' + p''_{1,0} dx)] \\ \quad + (t - \sigma z) [\sigma dx - (p'_{0,1} dy' + p''_{0,1} dx)] \\ \quad + z [d\sigma - (p'_0 dy' + p''_0 dx)]. \end{cases}$$

Par un choix convenable de σ , $z^{(0,1)}$ disparaît encore de cette relation; il suffit que l'on ait satisfait à la condition

$$(31) \quad \sigma dy' = p'_{1,0} dx + p'_{1,0} dy'.$$

Cela fait, les transformations de l'équation (10) laisseront toutes à la formule (30) le caractère d'une relation entre z et t seulement, σ est donc un invariant; il est visible que $z^{(1,0)}$ est aussi un invariant relatif, de poids 1. Ce poids, en conséquence, est celui de σ lui-même, c'est-à-dire des deux membres de l'équation (31). Au reste, on a montré qu'il est permis d'écrire (13, § I)

$$(32) \quad p''_{1,0} = -a_4, \quad p'_{1,0} = -a_3 + \frac{\partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x};$$

δ est un invariant indéterminé, pour lequel on peut prendre

$$a_4^{\frac{1}{2}},$$

et, comme conclusion, voici un nouveau covariant de l'équation proposée

$$(33) \quad a_4 dx + \left(a_3 - \frac{1}{6} \frac{\partial \log a_1}{\partial x} \right) dy.$$

Son quotient par $a_1^{\frac{1}{2}}$ n'est altéré par aucun changement de variables et, pour qu'il soit une différentielle exacte, la condition nécessaire

$$(34) \quad 6a_4 \frac{\partial a_1}{\partial y'} - 2a_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + 6a_3 a_4 \right) + 3 \frac{\partial a_1}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + 6a_3 a_4 \right) = 0$$

doit être invariante. On en déduit d'une manière immédiate que l'expression

$$(35) \quad \nu_6 = 6a_4 \frac{\partial a_1}{\partial y'} - 2a_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + 6a_3 a_4 \right) + 3 \frac{\partial a_1}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + 6a_3 a_4 \right)$$

est un invariant relatif, de poids égal à 6

J'ai maintenant à distinguer deux cas : Si l'invariant absolu

$$\nu_6 \nu_3^{-\frac{6}{5}}$$

n'est pas uniquement fonction de y' , il ne faut que le substituer à x dans l'équation (24), la forme canonique cherchée sera obtenue.

S'il y a une liaison entre y' et $\nu_6 \nu_3^{-\frac{6}{5}}$, l'équation (26) donne lieu à cette relation évidente

$$(36) \quad \frac{\partial^2 \nu_3'}{\partial x'^2} = 0;$$

je représente alors par M un multiplicateur de l'équation différentielle

$$(37) \quad a_4 dx + \left(a_3 - \frac{1}{6} \frac{\partial \log a_1}{\partial x} \right) dy' = 0,$$

et par H le produit

$$M a_1^{\frac{1}{2}};$$

cet invariant absolu vérifie l'identité suivante

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial y'} \left(a_1^{\frac{1}{2}} H \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[H \left(a_3 a_1^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{\partial a_1^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} \right) \right] = 0;$$

mais, la condition (36) étant satisfaite, l'équation

$$a_1' dx' + \left(a_3' - \frac{1}{6} \frac{\partial \log a_1'}{\partial x'} \right) dy' = 0,$$

équivalente à (37), est linéaire en x' , de sorte que parmi les expressions de H il en est une, fonction de y' seulement, que la formule (38) achève de déterminer.

D'ailleurs l'invariant

$$\nu_0 \nu_3^{-\frac{6}{5}}$$

est aussi, par hypothèse, une fonction de y' ; cette variable elle-même s'exprime donc explicitement au moyen de a_1, a_2, \dots, a_4 et de leurs dérivées, comme déjà le faisaient ses dérivées partielles, $\frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial y}$. Par suite, le multiplicateur M est donné de la même manière et les dérivées de l'invariant absolu

$$(39) \quad \tau_1 = \int M \left[a_1 dx + \left(a_3 - \frac{1}{6} \frac{\partial \log a_1}{\partial x} \right) dy \right]$$

s'en déduisent sous une forme semblable. Lorsqu'on l'a substitué à x dans l'équation (24), les coefficients sont devenus des invariants proprement dits : cette substitution est certainement possible, car une relation de cette espèce

$$\tau_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

exigerait

$$I_2' a_1' = 0,$$

comme on le reconnaît sans aucun calcul.

Les divers cas définis par l'identité

$$\nu_7 = 0$$

sont ainsi séparés, et nulle exception n'échappe plus à l'analyse précédente, si ce n'est quand ν_3 s'évanouit.

§ VI.

Lorsque ν_3 est nul, l'équation du premier ordre

$$(1) \quad L_1 dx + L_2 dy = 0$$

est une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée,

$$(2) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0;$$

de plus, avec les expressions

$$p(\zeta), \quad p'(\zeta), \quad p''(\zeta),$$

dont j'ai fait usage § II, on peut former deux équations aux dérivées partielles linéaires,

$$(3) \quad \begin{cases} g(\zeta) = p(\zeta) - \frac{L_2}{L_1} p'(\zeta) = 0, \\ g'(\zeta) = p''(\zeta) - \frac{L_1}{L_2} p'(\zeta) = 0, \end{cases}$$

qui satisfont à une identité du premier ordre (7, § II),

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial g'(\zeta)}{\partial y} + \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial x} - \frac{L_1}{L_2} \left(p_{0,1} - \frac{L_2}{L_1} p'_{0,1} \right) g'(\zeta) \\ \quad - \left(p'_{1,0} - \frac{L_1}{L_2} p'_{1,0} \right) g(\zeta) = 0; \end{cases}$$

enfin l'on a trouvé, (15, § I), que ces relations

$$(5) \quad \begin{cases} (p_0 - \varepsilon_{0,1}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A(\delta^{-\frac{1}{3}}), \\ (p'_{0,1} + \varepsilon'_{0,1}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A'(\delta^{-\frac{1}{3}}), \\ (p''_0 - \varepsilon'_{1,0}) \delta^{-\frac{1}{3}} = A''(\delta^{-\frac{1}{3}}), \\ \varepsilon'_{0,1} = \varepsilon_{1,0} \end{cases}$$

peuvent être établies, quelle que soit l'équation (2). Il s'y ajoute, quand ν_5 est nul (11, § II),

$$(6) \quad \varepsilon_{0,1} L_1 + \varepsilon'_{0,1} L_2 = 0, \quad \varepsilon_{1,0} L_1 + \varepsilon'_{1,0} L_2 = 0$$

et l'on en conclut d'abord que les quantités $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon'_{0,1}$, $\varepsilon_{1,0}$, $\varepsilon'_{1,0}$ n'entrent pas dans le système (3). On voit ensuite qu'ayant posé, pour abréger,

$$(7) \quad Z = \delta^{-\frac{1}{3}} \zeta,$$

ce système (3), invariablement lié à l'équation (2), s'écrit ainsi

$$(8) \quad \begin{cases} L_1 Z^{(0,2)} - L_2 Z^{(1,1)} + (a_1 L_1 - a_2 L_2) Z^{(1,0)} \\ \quad - (a_2 L_1 - a_3 L_2) Z^{(0,1)} + (L_1 \alpha - L_2 \alpha') Z = 0, \\ L_2 Z^{(2,0)} - L_1 Z^{(1,1)} + (a_3 L_2 - a_2 L_1) Z^{(1,0)} \\ \quad - (a_4 L_2 - a_3 L_1) Z^{(0,1)} + (L_2 \alpha'' - L_1 \alpha') Z = 0, \end{cases}$$

α , α' , α'' étant donnés par les relations

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2(a_1 a_3 - a_2^2), \\ \alpha' = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 - a_2 a_3, \\ \alpha'' = \frac{\partial a_4}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2(a_2 a_4 - a_3^2), \end{cases}$$

employées au § I.

Or, en raison de l'identité (4), chacune des deux équations (8) s'intègre par la méthode de Laplace, dès la seconde opération [Cf. *Sur quelques équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVII^e Cahier)]; leur solution commune,

$$(10) \quad Z = \gamma \left(\frac{dX}{d\xi} + uX \right),$$

contient une arbitraire X et, en général, sa dérivée; la variable ξ , dont

elles dépendent, est définie par la condition

$$(11) \quad L_1 dx + L_2 dy = \mu d\xi;$$

u et γ sont des fonctions déterminées de x et de y , toutes deux visiblement invariantes, la première de poids zéro, la seconde de poids $-\frac{1}{3}$. Substitution faite de l'expression (10) en l'une des équations qu'elle vérifie, les coefficients de X et de toutes ses différentielles s'évanouissent.

A la deuxième dérivée,

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2},$$

répond cet ensemble de termes

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & L_1 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - L_2 \left(\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \\ & + \gamma \left[(a_2 L_1 - a_3 L_2) \frac{\partial \xi}{\partial x} - (a_3 L_1 - a_4 L_2) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right], \end{aligned} \right.$$

qui doit en conséquence être nul. Mais l'égalité connue

$$L_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

entraîne

$$L_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - L_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{L_1} \left(L_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} - L_2 \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x};$$

si donc on a pris

$$(13) \quad R_1 = L_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} - L_2 \frac{\partial L_1}{\partial x} + a_2 L_1^2 - 2 a_3 L_1 L_2 + a_4 L_2^2,$$

la disparition des termes (12) exige simplement

$$(14) \quad L_1 \left(L_1 \frac{\partial \gamma}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \gamma R_1 = 0$$

et, cette relation admise, dans le résultat de la substitution indiquée $\frac{d^2 X}{d\xi^2}$ n'entre plus. Afin que le même fait ait lieu pour la première dérivée,

$$\frac{dX}{d\xi},$$

je trouve qu'il faut avoir

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \left\{ L_1 \left[L_1 \frac{\partial(u\gamma)}{\partial y} - L_2 \frac{\partial(u\gamma)}{\partial x} \right] + u\gamma R_1 \right\} \\ + L_1 \left[L_1 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} - L_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + (a_2 L_1 - a_3 L_2) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - (a_3 L_1 - a_4 L_2) \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right] = 0,$$

ce qui, d'après (14), se réduit facilement à ceci

$$(15) \quad \left\{ L_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \left[L_1^3 (L_1 \alpha' - L_2 \alpha'') + R_1 \frac{\partial(L_1^2)}{\partial x} - L_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial x} + R_1 L_1 (a_3 L_1 - a_4 L_2) \right] \right\} = 0.$$

D'ailleurs, u et ξ étant des invariants absolus, le déterminant

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

est un invariant relatif; l'identité (15) signifie donc qu'un invariant, de poids égal à 1, est donné par la formule

$$(16) \quad w_1 = \frac{1}{L_1^3} \left[L_1^3 (L_1 \alpha' - L_2 \alpha'') + R_1 \frac{\partial(L_1^2)}{\partial x} - L_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial x} + R_1 L_1 (a_3 L_1 - a_4 L_2) \right].$$

J'ai, à son sujet, quelques remarques à présenter. D'abord, il ne semble pas symétrique en x et y : c'est que, l'équation $v_3 = 0$ étant satisfaite, il y a, pour toute fonction de a_1, a_2, \dots, a_4 et de leurs dérivées, plusieurs expressions différentes. Les calculs qui précèdent reposent sur l'expression (10) de z et la deuxième équation (8); j'aurais pu remplacer cette dernière par la première équation du même système : en posant

$$(17) \quad R_2 = L_1 \frac{\partial L_2}{\partial y} - L_2 \frac{\partial L_1}{\partial y} + a_1 L_1^2 - 2a_2 L_1 L_2 + a_3 L_2^2,$$

j'aurais obtenu

$$(18) \quad w_1 = \frac{1}{L_2^3} \left[L_2^3 (L_2 \alpha' - L_1 \alpha) - R_2 \frac{\partial(L_2^2)}{\partial y} + L_2^2 \frac{\partial R_2}{\partial y} - L_2 R_2 (a_1 L_1 - a_2 L_2) \right];$$

en outre,

$$L_1 R_2 - L_2 R_1 = 0,$$

puisque v_3 est nul; cela fait voir comment les relations (16) et (18) sont équivalentes. Il est utile de connaître ces diverses formes d'un même invariant : si l'une d'elles, par certains choix des variables, paraît n'avoir pas une signification déterminée, la seconde permet d'éviter toute difficulté; c'est ce qui a lieu quand L_1 ou L_2 s'évanouit.

On rattache à w_1 une série indéfinie d'invariants w_3, w_5, \dots , qui s'en déduisent, comme l'on sait, par la formule générale

$$(19) \quad w_{m+2} = L_1 \frac{\partial w_m}{\partial y} - L_2 \frac{\partial w_m}{\partial x} + m w_m \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right).$$

Les rapports

$$u_3 = \frac{w_3}{w_1^3}, \quad u_5 = \frac{w_5}{w_1^5},$$

qui sont des invariants absolus, donnent le moyen de ramener l'équation proposée à une expression canonique, lorsque u_3, u_5 sont des variables indépendantes.

§ VII.

Afin qu'il se présente des cas exceptionnels, il faut imaginer u_3 et u_5 liés par une relation où ils entrent seuls.

Si l'on n'a point alors

$$u_5 - 3u_3^2 = 0,$$

la méthode employée au § IV quand on supposait t_3 fonction de t_1 fait connaître le multiplicateur de l'équation différentielle

$$L_1 dx + L_2 dy = 0$$

et les dérivées de la fonction ξ ; cela suffit évidemment pour terminer toutes les recherches.

Lorsque, au contraire,

$$(1) \quad u_5 - 3u_3^2 = 0,$$

il est facile de voir que

$$L_1 \frac{\partial u_3}{\partial y} - L_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_3 = \mathcal{F}(\xi);$$

l'intégrale ξ elle-même est donc obtenue, à moins que u_3 soit une constante.

Cette hypothèse écartée, je puis poser

$$L_1 = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad L_2 = \mu \frac{\partial u_3}{\partial y};$$

or l'une de ces relations donne l'expression de μ ; le quotient

$$\frac{\mu}{w_1},$$

qui est un invariant absolu, ne peut d'ailleurs être une fonction de ξ , car il faudrait avoir

$$w_3 = 0,$$

et ce cas est exclu, comme tous ceux dans lesquels u_3 est une constante. On possède, en conséquence, deux invariants absolus distincts, dont les dérivées sont des fonctions explicites de a_1, a_2, \dots, a_4 ou de leurs dérivées, en sorte qu'on sait construire une transformée canonique de l'équation proposée.

Avant d'étudier les exceptions encore réservées, j'indique une expression simple des divers types d'équations pour lesquelles v_3 est nul.

Je supposerai d'abord que ξ soit choisi pour variable au lieu de x : il en résulte

$$(2) \quad L_2 = 0, \quad L_1 = \mu,$$

et des relations (8) et (10) du paragraphe précédent on déduit

$$(3) \quad \gamma^{(0,1)} + a_2 \gamma = 0;$$

mais l'invariant γ est du poids $-\frac{1}{3}$; ayant représenté par

$$\gamma'$$

ce qu'il devient après la substitution

$$y' = \varphi(x, y)$$

et, de même, par a'_2, a'_3, \dots, L'_2 ce que deviennent a_2, a_3, \dots, L_2 , on a

$$(4) \quad \gamma'^3 = \gamma^3 \frac{\partial y'}{\partial y}.$$

Si l'on veut que γ' soit une fonction de x , il faut prendre pour y' un invariant absolu, qu'une quadrature fait connaître; l'équation (3) exige alors

$$a'_2 = 0,$$

ce qui entraîne

$$(5) \quad \frac{\partial^2 a'_3}{\partial y'^2} = 0,$$

puisque L'_2 doit être nul; a'_3 renferme donc y' au premier degré et voici enfin, comme conclusion, une forme caractéristique des équations pour lesquelles v_3 s'évanouit,

$$(6) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + 3(b_1 y + b_2) dx^2 dy + a_4 dx^3 = 0;$$

b_1, b_2 contiennent uniquement la variable x , a_4 est arbitraire.

Je cherche maintenant ce qu'implique, pour l'équation (6), la condition

$$u_3 - 3u_3^2 = 0.$$

Je trouve d'abord

$$(7) \quad w_1 = b_1, \quad L_1 = \frac{\partial^2 a_4}{\partial y^2} - 2 \left[\frac{db_1}{dx} + 3b_1(b_2 + b_1 y) \right],$$

par suite

$$(8) \quad u_3 = 6 - \frac{1}{b_1^2} \frac{\partial^3 a_4}{\partial y^3};$$

ayant d'ailleurs, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

$$L_1 \frac{\partial u_3}{\partial y} = w_1^2 (u_3 - 3u_3^2),$$

je puis écrire

$$\frac{\partial^4 a_1}{\partial y^4} = 0$$

ou bien

$$(9) \quad a_1 = g_1 y^3 + 3g_2 y^2 + 3g_3 y + g_4,$$

sans que les fonctions g_1, g_2, \dots, g_4 de la seule variable x soient assujetties à aucune relation.

De plus, u_3 est une simple constante, d'après la formule (8), quand le rapport

$$\frac{g_1}{b_1^2} = k$$

est constant, ce que je vais supposer.

L'équation différentielle

$$(10) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0$$

admet pour covariant, d'une façon générale, la suivante

$$(11) \quad L_1 dx + L_2 dy = 0;$$

elle en admet aussi une autre, du second ordre,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 \\ \quad + a_4 dx^3 + h w_1^{-1} (L_1 dx + L_2 dy)^2 = 0, \end{array} \right.$$

où la constante h est quelconque.

Quand la condition

$$du_3 = 0$$

est satisfaite pour l'équation étudiée, elle l'est encore pour (12); car, la première étant réduite à la forme (6), L_2 est nul, L_1 fonction linéaire de

y et w_1 indépendant de cette variable, ce qui donne à l'équation (12) tous les caractères de (6). Mais l'arbitraire h , dont on dispose, permet d'annuler l'invariant u_3 attaché à cette équation (12) et, celle-ci ayant les mêmes invariants que (10), tout le problème consiste à discuter le cas dans lequel w_3 s'évanouit.

Lorsque w_3 est égal à zéro pour l'équation (10), le multiplicateur de la différentielle

$$L_1 dx + L_2 dy$$

est w_1^{-1} ; les dérivées de l'invariant ξ sont par conséquent connues et rien n'empêche de le substituer à la variable x ; je suppose cette opération faite, de sorte qu'on ait

$$(13) \quad x = \xi, \quad L_2 = 0, \quad L_1 = w_1.$$

On a vu que le système linéaire associé à l'équation (10) peut être déterminé par les conditions

$$p_0 = 0, \quad p'_0 = 0, \quad p''_0 = 0,$$

au moyen desquelles l'équation (4, § I) est devenue

$$(14) \quad dx d^2 z - dz d^2 x + dz(p''_{0,1} dx^2 + 2p'_{0,1} dx dy + p_{0,1} dy^2) = 0;$$

x est maintenant un invariant absolu, il en est de même de z (§ III); l'équation

$$(15) \quad p''_{0,1} dx^2 + 2p'_{0,1} dx dy + p_{0,1} dy^2 = 0$$

est donc un covariant de (10). Dans cette dernière, a_1 est nul; c'est dire que

$$p_{0,1} = 0,$$

d'où l'on conclut que l'expression

$$(16) \quad p''_{0,1} dx + p'_{0,1} dy$$

est aussi un covariant de l'équation proposée. Au reste,

$$(17) \quad p''_{0,1} = a_3 + \frac{2 \partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x}, \quad p'_{0,1} = a_2 + \frac{\partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y},$$

et δ est un invariant quelconque, de poids égal à 1. En prenant, par exemple,

$$(18) \quad \delta = w_1,$$

l'expression (16) se change en la suivante

$$(19) \quad \left(a_3 + \frac{2 \partial \log w_1^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} \right) dx + \left(a_2 + \frac{\partial \log w_1^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} \right) dy$$

ou en celle-ci

$$(20) \quad \left(b_1 y' + b_2 + \frac{2 \partial \log b_1^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} \right) dx,$$

lorsqu'on a donné à l'équation considérée la forme

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} dx d^2 y' - dy' d^2 x + 3(b_1 y' + b_2) dx^2 dy' \\ + (g_1 y'^3 + 3g_2 y'^2 + 3g_3 y' + g_4) dx^3 = 0, \end{aligned} \right.$$

semblable à (6). Mais le poids du covariant (19) est évidemment zéro ; son multiplicateur, d'après (20), est une fonction linéaire de y' , et l'identité

$$(22) \quad \left(a_3 + \frac{2 \partial \log w_1^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} \right) dx + \left(a_2 + \frac{\partial \log w_1^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} \right) dy = \theta dx$$

le définit. Elle fait connaître un invariant absolu

$$(23) \quad \theta = a_3 + \frac{2 \partial \log w_1^{-\frac{1}{3}}}{\partial x},$$

qui ne se confond point avec ξ , pourvu que w_1 ne soit pas nul, et à l'aide duquel on construit pour l'équation (10) une transformée canonique.

Celle-ci a ses coefficients fonctions explicites de a_1, a_2, \dots, a_4 ou de leurs dérivées; elle offre le même aspect que (21), et, ce fait ayant lieu à la fois pour les équations (10), (12), on sait réduire à la forme (21) toute équation dont l'invariant u , est une constante, à moins que u , s'évanouisse.

§ VIII.

Je suppose maintenant $\omega_1 = 0$. Puisqu'on peut représenter ainsi

$$dx d^2 y - dy d^2 x + 3(b_1 y + b_2) dx^2 dy + a_4 dx^3 = 0$$

les équations pour lesquelles ν_1 est nul, il faut en ce cas avoir

$$b_1 = 0,$$

et l'étude dont il s'agit est la même que celle du type très simple

$$(1) \quad dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + a_4' dx'^3 = 0.$$

Le système (8, § VI) équivaut alors à une relation unique, du premier ordre; que l'on considère, en effet, l'expression

$$(2) \quad L_1 Z^{(0,1)} - L_2 Z^{(1,0)} + \frac{R_1}{L_1} Z = Q(Z);$$

du système indiqué l'on déduira les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log Q(Z)}{\partial x} = \frac{1}{L_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + a_3 L_1 - a_4 L_2 \right), \\ \frac{\partial \log Q(Z)}{\partial y} = \frac{1}{L_2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial y} + a_4 L_1 - a_3 L_2 \right) \end{cases}$$

ou bien, en posant

$$(4) \quad N = e^{\int \left[\frac{1}{L_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + a_3 L_1 - a_4 L_2 \right) dx + \frac{1}{L_2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial y} + a_4 L_1 - a_3 L_2 \right) dy \right]},$$

la suivante

$$(5) \quad L_1 Z^{(0,1)} - L_2 Z^{(1,0)} + \frac{R_1}{L_1} Z = c N^{\frac{1}{3}},$$

dans laquelle la constante c est arbitraire.

Or évidemment

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + a_3 L_1 - a_4 L_2 \right) &= -\frac{R_1}{L_1 L_2} + \frac{1}{L_2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} + a_2 L_1 - a_3 L_2 \right), \\ \frac{1}{L_2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial y} + a_4 L_1 - a_2 L_2 \right) &= \frac{R_2}{L_2 L_1} + \frac{1}{L_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial y} + a_2 L_1 - a_3 L_2 \right),\end{aligned}$$

de sorte que l'identité

$$(5') \quad L_1 \frac{\partial N}{\partial y} - L_2 \frac{\partial N}{\partial x} + 5 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) N = 2N \left(\frac{3R_1}{L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right)$$

est satisfaite; d'ailleurs Z est un invariant relatif, de poids $-\frac{1}{3}$: il est donc permis d'écrire

$$(6) \quad Z = V \mu^{-\frac{1}{3}},$$

en désignant par V un invariant absolu, par $\frac{1}{\mu}$ le multiplicateur de la différentielle

$$L_1 dx + L_2 dy$$

et, comme

$$L_1 \frac{\partial \mu}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) = 0,$$

il résulte de (6) la relation

$$\mu^{-\frac{1}{3}} \left[L_1 V^{(0,1)} - L_2 V^{(1,0)} + \frac{1}{3} V \left(\frac{3R_1}{L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) \right] = c N^{\frac{1}{3}},$$

d'après laquelle un invariant, de poids $\frac{5}{3}$, est donné par la formule

$$\frac{1}{3} V \mu^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3R_1}{L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) - c N^{\frac{1}{3}},$$

et cela, quelle que soit c .

En conséquence :

1° N , obtenu par une quadrature, est un invariant, de poids égal à 5 ;

2° L'expression tout explicite

$$(7) \quad \frac{3R_1}{L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = i_2$$

est un invariant proprement dit, dont le poids est 2.

D'autres s'en déduisent par l'équation connue

$$(8) \quad i_{2m+2} = L_1 \frac{\partial i_{2m}}{\partial y} - L_2 \frac{\partial i_{2m}}{\partial x} + 2m i_{2m} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right),$$

et la série des invariants absolus

$$(9) \quad j_{2m} = i_{2m} i_2^{-m}$$

procure les éléments nécessaires à l'étude générale de l'équation proposée.

Je ne m'arrête point aux cas dans lesquels j_4 et j_6 sont liés par une relation identique, différente ou non de celle-ci,

$$(10) \quad j_6 - 2j_4^2 = 0,$$

car ils se traitent par la méthode dont j'ai fait usage (§§ IV et VII); j'arrive immédiatement à l'hypothèse

$$(11) \quad j_4 = \text{const.},$$

qui exige de nouveaux procédés.

Comme les deux relations

$$(12) \quad \begin{cases} L_1 \frac{\partial N}{\partial y} - L_2 \frac{\partial N}{\partial x} + 2N \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) = 2i_2 N, \\ L_1 \frac{\partial i_2}{\partial y} - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial x} + 2i_2 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) = j_4 i_2^2 \end{cases}$$

sont vérifiées et entraînent la suivante

$$L_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(i_1^{-\frac{2}{j_4-1}} N^{\frac{j_4}{j_4-1}} \right) - L_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(i_1^{-\frac{2}{j_4-1}} N^{\frac{j_4}{j_4-1}} \right) + i_1^{-\frac{2}{j_4-1}} N^{\frac{j_4}{j_4-1}} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) = 0,$$

l'une des expressions de μ s'obtient ainsi

$$(13) \quad \mu = i_2^{\frac{-2}{5j_2-1}} N^{\frac{j_2}{5j_2-1}},$$

pourvu qu'on n'ait point $5j_2 - 4 = 0$. Elle se réduit à

$$i_2^{\frac{1}{5}},$$

quand j_2 est nul; lorsque $j_2 = \frac{4}{5}$, la formule (13) ne convient plus, mais la fonction ξ , déterminée par l'identité

$$L_1 dx + L_2 dy = \mu d\xi,$$

se calcule aisément de cette manière

$$(14) \quad \xi = i_2^{\frac{2}{5}} N^{-1},$$

à moins que l'invariant $i_2 N^{-2}$ soit une simple constante. Soient L'_1, L'_2 ce que L_1, L_2 sont devenus après que l'équation différentielle est mise sous la forme (1) : j_2 étant un nombre, les relations

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left(L_1'^{j_2-1} \frac{\partial L'_1}{\partial y'} \right) = 0, \quad L'_1 = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial y'^2}, \quad L'_2 = 0$$

sont satisfaites; en conséquence, exception faite des trois cas suivants

$$(15) \quad j_2 = 1, \quad j_2 = 0, \quad j_2 = \frac{1}{2},$$

le coefficient a'_1 peut être réduit à ceci

$$(16) \quad a'_1 = X y'^{\frac{2j_2-1}{j_2-1}} + X_1;$$

X_1, X sont des fonctions de la seule variable x' et, dans les cas exceptés, voici comment il faut remplacer l'expression précédente

$$(17) \quad \begin{cases} j_2 = 1, & a'_1 = X e^{-y'} + X_1 y', \\ j_2 = \frac{1}{2}, & a'_1 = X \log y' + X_1, \\ j_2 = 0, & a'_1 = X y' \log y' + X_1. \end{cases}$$

Je prends d'abord j_4 différent de 1, 0, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$: l'invariant absolu

$$(18) \quad \omega = \frac{i^{\frac{1}{2}}}{\mu} = i^{\frac{5j_4}{2(5j_4-4)}} N^{\frac{-j_4}{5j_4-4}}$$

est lié à y' de cette façon simple

$$(19) \quad \omega = [j_4(2j_4-1)(1-j_4)^3 X]^{\frac{-j_4}{2(5j_4-4)}} y'^{\frac{j_4}{2(1-j_4)}};$$

en outre, il résulte de (13)

$$(20) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = i^{\frac{2}{5j_4-4}} N^{\frac{-j_4}{5j_4-4}} L_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = i^{\frac{2}{5j_4-4}} N^{\frac{-j_4}{5j_4-4}} L_2,$$

en sorte que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x'} = X^{\frac{j_4-1}{5j_4-4}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y'} = 0;$$

d'ailleurs ω et ξ sont manifestement indépendants; rien n'empêche donc de les substituer à y et x dans l'équation proposée

$$(21) \quad dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0.$$

Elle prend ainsi la forme

$$d\xi d^2 \omega - d\omega d^2 \xi + 3\alpha_2 d\omega^3 d\xi + \alpha_4 d\xi^3 = 0,$$

et il est clair que ses coefficients α_2, α_4 sont des invariants proprement dits, multipliés par une certaine puissance de N

$$N^{\frac{j_4}{5j_4-4}};$$

leurs produits par ω ,

$$\alpha_2 \omega, \quad \alpha_4 \omega,$$

sont donc des invariants absolus, fonctions explicites de a_1, a_2, \dots, a_4 ou de leurs dérivées. Or

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha_2 \omega = \frac{1}{3}, \\ \alpha_4 \omega = X^{\frac{2(1-j_4)}{5j_4-4}} \left\{ \omega^3 \frac{d^2 X^{\frac{1-j_4}{5j_4-4}}}{dx^2} + [j_4(2j_4-1)(1-j_4)^3]^{\frac{j_4-1}{5j_4-4}} \omega^{\frac{2(2j_4-1)}{j_4}} a_4' \right\}; \end{cases}$$

l'un est une constante numérique, le second n'en peut être une que si X_1 , dX s'évanouissent ensemble. Hormis ce cas, dont la théorie est immédiatement évidente, l'expression

$$i_2^{-1} \left[L_1 \frac{\partial(x_1, \omega)}{\partial y} - L_2 \frac{\partial(x_1, \omega)}{\partial x} \right]$$

représente un invariant proprement dit dont le poids est nul et, d'après les relations (19) et (22), ce n'est jamais une fonction du premier, à moins que dX ne soit égal à zéro; de plus, pour annuler X_1 , quel que soit X , la différence

$$\Omega = i_2^{-1} \left[L_1 \frac{\partial(x_1, \omega)}{\partial y} - L_2 \frac{\partial(x_1, \omega)}{\partial x} \right] - j_1 \alpha_1 \omega$$

ne doit renfermer que ξ , c'est-à-dire vérifier l'équation

$$I_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} - I_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0,$$

caractère facile à reconnaître.

Lorsque X est une constante, l'égalité (22) permet de calculer algébriquement et par des expressions où figure seul l'invariant proprement dit déjà construit : 1° une fonction linéaire homogène de l'invariant y' , 2° les dérivées d'une fonction de ξ ; c'est donner sans quadrature une transformée canonique, satisfaisant aux conditions indiquées,

$$L'_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y'} \left(L_1'^{-1} \frac{\partial L'_1}{\partial y'} \right) = 0.$$

Ainsi sont obtenus tous les éléments nécessaires à l'étude de l'équation (1), quand j_1 n'a point l'une des valeurs jusqu'à présent réservées. A la relation (19), il faut substituer,

$$\text{Lorsque } j_1 = 1, \quad \omega = X^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} y'},$$

$$\text{Lorsque } j_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega = - \left(\frac{X}{2^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{6}} y'^{\frac{1}{2}};$$

mais aucune difficulté nouvelle n'oblige à modifier la méthode précédente.

Pour $j_1 = 0$, les conclusions sont plus immédiates encore; car, ayant par hypothèse $i_2^{\frac{1}{2}} = \mu$, il en résulte

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = L_1 i_2^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = L_2 i_2^{-\frac{1}{2}},$$

et l'invariant absolu

$$\nu = \log(i_2^2 N^{-2}),$$

qui n'est pas une constante, a sa différentielle donnée, comme l'est celle de ξ , en fonction explicite de a_1, a_2, \dots, a_4 et de leurs dérivées.

Il y a donc une transformée canonique de l'équation (21), et dont on sait faire le calcul en introduisant ν et ξ comme variables au lieu de y et x .

Je suppose maintenant que j_1 soit égal à $\frac{4}{5}$, l'invariant ν différant d'une constante. D'après (14), on peut alors prendre

$$\xi = \log(i_2 N^{-\frac{2}{5}}),$$

de sorte que

$$\mu = \frac{L_1}{\frac{\partial \log}{\partial x}(i_2 N^{-\frac{2}{5}})} = \frac{L_2}{\frac{\partial \log}{\partial y}(i_2 N^{-\frac{2}{5}})};$$

de plus,

$$\omega = \frac{i_2^{\frac{1}{2}}}{\mu}$$

est un invariant proprement dit; or ω et ξ suffisent évidemment pour résoudre d'une façon complète le problème qu'on avait en vue.

J'imagine enfin que $d\nu$ s'évanouisse. En ce cas, l'équation (1) doit être réductible à la suivante

$$(23) \quad dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + \left(\frac{c}{y'^2} + X_1 \right) dx'^2 = 0,$$

et les méthodes indiquées jusqu'ici ne font alors connaître aucun invariant proprement dit qui se distingue de i_1 . Malgré des recherches déjà nombreuses sur ce sujet, je n'ai pu ramener l'étude de l'équation (23) aux

mêmes principes que celle des équations précédentes; mais, si l'on veut introduire l'expression

$$(24) \quad I = \int_k^y \int_k^x i_2^{\frac{1}{2}} dx dy,$$

représentant, on le sait, un invariant absolu, ou bien celle-ci

$$L_1 \int_k^x i_2^{\frac{1}{2}} dx - L_2 \int_k^y i_2^{\frac{1}{2}} dy,$$

qui en découle, il est facile d'obtenir μ et ξ , par suite x' et y' .

Une remarque semblable s'applique au dernier type d'équations dont il restait à faire mention, celui qui répond à l'hypothèse

$$(25) \quad i_2 = 0.$$

Les équations de cette espèce sont susceptibles de prendre la forme

$$(26) \quad dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + (cy'^2 + X_1 y') dx'^3 = 0,$$

comme le montre un calcul immédiat. L'expression de μ , pour ce cas, est visible, c'est la suivante

$$(27) \quad \mu = N^{\frac{1}{3}},$$

et la relation

$$(28) \quad \xi = \int N^{-\frac{1}{3}} (L_1 dx + L_2 dy),$$

que l'on en conclut, donne un moyen commode de caractériser les diverses équations qui vérifient l'identité (25); cependant, je n'ai pas réussi à construire pour elles un seul invariant proprement dit, de sorte qu'il est permis de se demander si elles possèdent des invariants de cette espèce, hormis les constantes absolues.

Je n'ai pas pensé qu'une réponse définitive à cette question fût indispensable pour terminer les recherches que j'avais à présenter dans ce

Mémoire. Je réserve donc pour une autre occasion l'étude plus complète des équations (23) et (26) et je me borne à rappeler qu'une classe d'équations échappe encore à la discussion précédente, celles qui, satisfaisant aux identités

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0,$$

n'ont pas d'invariants; elles ont été traitées dans un travail antérieur (*Journal de l'École Polytechnique*, LVII^e Cahier, 1887) et la forme de leurs intégrales est connue.

CHAPITRE III.

Applications des résultats précédents à l'intégration des équations différentielles. — Équations dont l'ordre peut être abaissé d'une unité. — Équations réductibles à la forme linéaire. — Équations qui représentent d'une seule manière des lignes géodésiques. — Relation invariante qui les définit. — Équations différentielles qui représentent, de deux manières différentes, des lignes géodésiques. — Leur réduction aux équations linéaires.

§ IX

Parmi les conséquences de la théorie précédente, il faut remarquer d'abord celles qui concernent les équations différentielles dont l'ordre s'abaisse, après une substitution appropriée, parce qu'elles se changent en une équation semblable à celle-ci

$$(1) \quad \begin{cases} dX d^2 Y - dY d^2 X + A_1 dY^3 \\ + 3 A_2 dY^2 dX + 3 A_3 dY dX^2 + A_4 dX^3 = 0, \end{cases}$$

dans laquelle A_1, A_2, \dots, A_4 dépendent de X seul; l'inconnue nouvelle

$$Y' = \frac{dY}{dX}$$

se détermine en ce cas à l'aide d'une équation du premier ordre et donne Y par une quadrature.

Dans le Chapitre II sont contenus tous les éléments nécessaires pour résoudre les deux questions suivantes :

1° Ayant à étudier une équation de cette espèce

$$(2) \quad dx d^2y - dy d^2x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0,$$

reconnaître si elle est réductible à la forme (1).

2° Trouver la substitution

$$(3) \quad X = f(x, y), \quad Y = \varphi(x, y),$$

par laquelle la réduction s'effectue.

On conçoit qu'il ne peut y avoir lieu à aucune recherche, quand t_7 et t_9 ne sont pas liés par une relation identique où ils entrent seuls; cette condition est en effet satisfaite pour toutes les équations telles que (1). Voici, cette hypothèse faite, les divers cas qui se peuvent offrir : ils se divisent en plusieurs groupes.

Première série de cas.

1° $t_9 = f(t_7)$, $5t_9 - 7t_7^2$ différent de zéro. — J'ai montré (§ IV) comment s'obtient l'invariant ξ ; son expression, qui résulte d'une quadrature, peut être prise pour la fonction Y, si l'équation (1) figure parmi les transformées de l'équation proposée; de plus, X se confond avec t_7 . L'équation canonique, construite comme on l'a vu au paragraphe indiqué, doit alors avoir tous ses coefficients fonctions de cet invariant, c'est la condition de possibilité.

2° $5t_9 - 7t_7^2 = 0$. — Une conséquence immédiate des résultats établis § IV, c'est que la relation précédente n'est jamais vérifiée par les équations (1), à moins que t_7 soit une constante; les équations de cette espèce se réunissent donc à la classe suivante et ne forment point un ensemble vraiment distinct.

3° $dt_7 = 0$. — Il n'est pas permis d'admettre que les expressions de $t_3^{(1)}$, $t_7^{(1)}$ soient indépendantes, puisqu'elles ne le sont pas pour l'équation (1).

La discussion repose sur ces invariants; elle est visiblement la même que celle du premier cas, lorsque l'identité

$$t_7^{(1)} - t_7 t_8^{(1)} = 0$$

n'est pas satisfaite; lorsqu'elle l'est, $t_8^{(1)}$ doit être une constante et l'équation appartient à la catégorie suivante, dont la définition est plus simple.

4° $dt_7 = 0$, $dt_8^{(1)} = 0$. — Il faut avoir recours aux invariants de la suite $t_m^{(2)}$, et il est nécessaire de supposer entre $t_8^{(2)}$, $t_7^{(2)}$ une relation identique; ce ne peut être celle-ci

$$t_7^{(2)} - t_7 t_8^{(2)} = 0,$$

car elle entraînerait la condition $dt_8^{(2)} = 0$, inadmissible d'après les résultats indiqués au § V. Il est clair d'ailleurs que l'étude se fait par les moyens employés pour le premier cas, mais les invariants dont on se sert sont différents. Ce sont précisément les variables X et Y que met en évidence l'analyse présentée au Chapitre II.

5° $\nu_7 = 0$. — Une quadrature fait connaître ξ , qu'il est permis de prendre pour la fonction Y. L'invariant proprement dit

$$\nu_6 \nu_8^{-\frac{6}{5}}$$

ne diffère pas de X. On a donc tous les éléments convenables pour former l'équation canonique; elle doit se réduire à l'équation (1), dont les coefficients ne renferment que X.

Il y a exception toutefois, et la méthode doit être modifiée si les invariants

$$\nu_6 \nu_8^{-\frac{6}{5}} \quad \text{et} \quad \xi$$

sont liés par une identité où ils entrent seuls. En ce cas, on se convainc immédiatement que l'invariant τ (39, § V), dont les dérivées partielles sont données d'une manière explicite, ne diffère pas en réalité de la variable Y; sachant, au reste, que l'égalité

$$\nu_6 \nu_8^{-\frac{6}{5}} = X$$

doit être vérifiée, rien n'empêche plus de construire une équation canonique, dont ne peut se distinguer l'équation (1) quand elle existe et d'où découlent les conséquences déjà mentionnées.

Deuxième série de cas.

1° $v_3 = 0$. — L'équation proposée n'est pas réductible à la forme (1), s'il n'existe entre les invariants u_3, u_3 (§ VI) une relation semblable à celle-ci

$$u_3 = f(u_3).$$

Hormis les exceptions déterminées par la formule

$$u_3 - 3u_3^2 = 0,$$

la méthode appliquée au premier cas de la série précédente convient encore; u_3 et u_3 remplacent t_3 et t_7 sans autre changement, mais l'équation canonique se représente de cette manière simple

$$(4) \quad dX d^2 Y - dY d^2 X + A_1 dY^3 + 3kX dY^2 dX = 0,$$

k désignant une constante qui diffère de zéro.

La condition $u_3 - 3u_3^2 = 0$ étant satisfaite, on verrait sans calcul que l'équation proposée ne peut être transformée en l'équation (1), si l'invariant u_3 n'est pas une constante.

2° $v_3 = 0, du_3 = 0$. — J'ai montré, dans la discussion générale, comment tous les cas se rattachent à celui-ci

$$w_3 = 0$$

et se réduisent avec lui aux formes canoniques. D'après la nature des substitutions faites, il est clair que les équations réduites ne se distinguent pas en substance de l'équation (1) elle-même et l'on en trouve, sans aucun calcul, l'expression caractéristique

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX d^2 Y - dY d^2 X \\ + (m_1 X^3 + 3m_2 X^2 + 3m_3 X + m_4) dY^3 + hX dY^2 dX = 0, \end{array} \right.$$

avec cinq constantes arbitraires m_1, m_2, \dots et h , dont la dernière ne peut être nulle.

Troisième série de cas.

1° $v_3 = 0, w_1 = 0$. — Les invariants absolus j_4 et j_6 sont liés par une relation identique

$$j_6 = f(j_4),$$

et l'on ne peut imaginer qu'elle devienne

$$j_6 - 2j_4^2 = 0,$$

sans que dj_4 s'évanouisse. La réduction est la même que pour le premier cas de la première série, les invariants employés sont différents. L'un d'eux, ξ , s'obtient comme précédemment par une quadrature; l'autre, $X = j_4$; la forme de l'équation canonique est simple

$$(6) \quad dX d^2 Y - dY d^2 X + A_1 dY^3 = 0,$$

et fait voir que l'intégration dépend d'une seule quadrature.

2° $v_3 = 0, w_1 = 0, dj_4 = 0$. — J'ai indiqué (§ VIII) les moyens :

De calculer, dans les divers cas qui peuvent s'offrir, le multiplicateur μ^{-1} , par conséquent l'intégrale ξ de l'équation différentielle

$$L_1 dx + L_2 dy = 0;$$

De construire un invariant proprement dit.

Ayant pris égal à X cet invariant, à Y l'intégrale ξ , la transformée (1) doit être obtenue, ce qui résout tout le problème.

Il y a toutefois deux exceptions remarquables; elles concernent les équations ainsi définies

$$dv = 0, \quad i_2 = 0,$$

pour lesquelles on n'a pas fait connaître un invariant absolu proprement dit.

Voici comment elles se traitent :

Soit d'abord $dv = 0$. Le quotient

$$\frac{L_1 \frac{\partial I}{\partial y} - L_2 \frac{\partial I}{\partial x}}{i_2^2}$$

représente un invariant relatif, de poids égal à l'unité. Calculé au moyen de l'équation réduite (23, § VIII)

$$(7) \quad dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + \left(\frac{c}{y'^3} + X_1 \right) dx'^3 = 0,$$

je le trouve égal à ceci

$$(8) \quad \frac{12c}{y'^3} (x' - h'),$$

h' étant une constante; c est l'une des expressions μ' que prend alors l'invariant μ et, comme x' est l'intégrale de l'équation différentielle

$$L_1 dx + L_2 dy = 0,$$

je puis écrire, d'une façon plus simple,

$$\mu' = \frac{12c}{y'^3},$$

en supposant

$$\frac{L'_1}{\mu'} = \frac{\partial \xi}{\xi \partial x'}, \quad \frac{L'_2}{\mu'} = 0 = \frac{\partial \xi}{\xi \partial y'}.$$

Ces relations entraînent

$$(9) \quad x' - h' = \xi,$$

car le facteur constant par lequel on pourrait multiplier ξ reste sans intérêt. Or il est aisé d'obtenir, pour l'équation (1), les quantités L_1 , L_2 , μ et ξ , dont la forme met en évidence les résultats suivants :

1° L'invariant i_2 ou N ne contient pas Y ; L_2 ne peut donc s'évanouir, puisque, d'après (5', § VIII), i_2 lui-même serait nul, contrairement aux hypothèses faites.

2° L'intégrale ξ est donnée par la relation

$$\xi = Y,$$

montrant que L , s'évanouit.

3° L'invariant absolu

$$\frac{\mu i_2^{-\frac{1}{2}}}{\xi}$$

ne renferme que X ; les expressions (8) et (9) établissent que c'est aussi une puissance de y' .

Il est donc prouvé, en définitive, que si l'équation proposée se transforme en une autre semblable à (1), x' et y' sont les variables appropriées à cette transformation; on a vu de plus comment elles s'obtiennent.

L'équation réduite est manifestement

$$dX d^2 Y - dY d^2 X + \left(\frac{c}{X^3} + c_1 \right) dY^3 = 0;$$

c et c_1 sont des constantes quelconques et l'intégration s'achève à l'aide des fonctions elliptiques.

Le cas où $i_2 = 0$ se traite d'une façon analogue :

x' , y' , que l'on calcule par quadratures, étant encore les variables qui conviennent à la transformation cherchée, l'équation (1) se confond alors avec la suivante

$$dX d^2 Y - dY d^2 X + (cX^2 + c_1) dY^3 = 0,$$

dont l'intégrale s'exprime par les fonctions elliptiques de première espèce. J'omets, pour abrégé, les preuves très simples de ces propositions.

§ X.

J'ai démontré que les deux conditions

$$(1) \quad v_3 = 0, \quad du_3 = 0$$

déterminent les équations différentielles, susceptibles d'être représentées ainsi

$$(2) \quad \begin{cases} dx d^2 y - dy d^2 x + 3(b_1 y + b_2) dy dx^2 \\ + (g_1 y^3 + 3g_2 y^2 + 3g_3 y + g_4) dx^3 = 0, \end{cases}$$

b_1, b_2, \dots, g_1 étant fonctions de la seule variable x , $\frac{g_1}{b_1^2} = \text{const.}$

La simplicité du type (2) permet d'établir une transformation curieuse. Je substitue à y l'inconnue nouvelle η , définie de cette manière,

$$(3) \quad \eta = \frac{dy}{dx} + r_1 y^2 + r_2 y + r_3,$$

en prenant pour r_1, r_2, r_3 des fonctions de x , qu'il reste à choisir. Par différentiation l'on déduit de (3), à cause de la relation (2),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\eta - r_3) + [(3b_1 - 2r_1)\eta + 3b_2 - r_2] \frac{d\eta}{dx} \\ + g_1 \eta^3 + \left(3g_2 - \frac{dr_1}{dx}\right) \eta^2 + \left(3g_3 - \frac{dr_2}{dx}\right) \eta + g_4 = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dr_1}{dx} + [(3b_1 - 2r_1)\eta + 3b_2 - r_2]\eta + [g_1 - r_1(3b_1 - 2r_1)]\eta^3 \\ & + \left[3g_2 - \frac{dr_1}{dx} - r_2(3b_1 - 2r_1) - r_1(3b_2 - r_2)\right]\eta^2 \\ & + \left[3g_3 - \frac{dr_2}{dx} - r_2(3b_2 - r_2) - r_3(3b_1 - 2r_1)\right]\eta \\ & + \left[g_4 - r_3(3b_2 - r_2) - \frac{dr_3}{dx}\right] = 0, \end{aligned} \right.$$

et, si l'on pose

$$(5) \quad \begin{cases} g_1 - r_1(3b_1 - 2r_1) = 0, \\ 3g_2 - \frac{dr_1}{dx} - r_1(3b_2 - r_2) - r_2(3b_1 - 2r_1) = 0, \end{cases}$$

l'équation précédente ne renferme plus y qu'au premier degré; $\frac{g_1}{b_1^2}$ étant un nombre, la première des relations (5) montre qu'il doit en être de même

du rapport

$$\frac{r_1}{b_1};$$

ses deux valeurs, h et k , vérifient évidemment le système

$$(6) \quad 2(h+k) = 3, \quad g_1 = 2hkb_1^2.$$

Rien n'empêche de regarder b_1 comme une constante, car une substitution simple permet de satisfaire à cette condition lorsqu'elle n'est pas remplie d'elle-même et je supposerai, par exemple,

$$db_1 = 0, \quad r_1 = hb_1;$$

J'ajoute que, comme r_2 est encore arbitraire, j'en puis profiter pour annuler l'expression suivante

$$(7) \quad \frac{dr_2}{dx} + r_2(3b_2 - r_2) - 3g_2 + r_2(3b_1 - 2r_1).$$

Toutes ces hypothèses faites, l'équation (4) est devenue

$$(8) \quad \frac{d\tau_1}{dx} + 2kb_1\tau_1\gamma + (3b_2 - r_2)\tau_1 + R = 0,$$

en désignant, pour abréger, par R cette fonction de x ,

$$(9) \quad g_1 - r_2(3b_2 - r_2) - \frac{dr_2}{dx},$$

qu'on sait calculer.

Des deux relations (3) et (8) on déduit sans peine une équation différentielle, où n'entre pas γ ; elle appartient au type étudié jusqu'ici

$$(10) \quad \frac{d^2\tau_1}{dx^2} + \alpha_1\left(\frac{d\tau_1}{dx}\right)^3 + 3\alpha_2\left(\frac{d\tau_1}{dx}\right)^2 + 3\alpha_3\frac{d\tau_1}{dx} + \alpha_4 = 0.$$

Ses coefficients peuvent contenir τ_1 et x , mais le premier, α_1 , s'évanouit. Il est digne de remarque qu'en général les équations de cette catégorie s'associent par couples, répondant à une même équation (2); l'échange

des nombres h et k substitue l'une à l'autre les deux équations du couple, et l'intégration de l'une d'elles entraîne celle de sa conjuguée, selon les formules (3) et (8). Mais je veux m'occuper surtout des équations pour lesquelles R est égal à zéro.

En ce cas,

$$3\alpha_2 = \frac{h-3}{2k\eta}, \quad \alpha_3 = \frac{r_2 - 2b_2h}{2k}.$$

Il en résulte immédiatement que, dans l'équation covariante, semblable à celle-ci

$$I_1 dx + L_2 dy = 0,$$

L_2 est nul et, puisque α_1 l'est aussi, l'invariant ν_3 disparaît.

Avant de continuer les recherches, il est commode de remplacer η par y'^m , en prenant

$$m = \frac{2h-3}{h}.$$

Dans l'équation transformée de (10),

$$(11) \quad \frac{d^2 y'}{dx^2} + 3\alpha'_2 \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + 3\alpha'_3 \frac{dy'}{dx} + \alpha'_1 = 0,$$

les coefficients s'expriment de cette manière

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha'_2 = 0, & \alpha'_3 = \frac{r_2 - 2b_2h}{2k}, \\ \alpha'_1 = -hb_1 y'^{m+1} \\ \quad + y' \left[3 \frac{db_2}{dx} - \frac{dr_2}{dx} + r_2(3b_2 - r_2) - 2kb_1 r_3 - \frac{h(3b_2 - r_2)^2}{2k} \right]. \end{cases}$$

Par suite, ν_1 s'annule et l'invariant j_4 est une constante, dont voici la valeur

$$(13) \quad j_4 = \frac{m}{m-1} = \frac{2h-3}{h-3}.$$

Réciproquement, toute équation différentielle satisfaisant aux condi-

tions suivantes (§ VIII)

$$(14) \quad v_3 = 0, \quad w_1 = 0, \quad dj_1 = 0, \quad L_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0,$$

se transforme par les substitutions (3) et (8) en une équation semblable à (2) et pour laquelle l'invariant R est égal à zéro. Que l'on considère en effet l'équation réduite (§ VIII), qui vérifie les relations (14),

$$(15) \quad \frac{d^2 y'}{dx^2} + 3a'_3 \frac{dy'}{dx} + a'_1 = 0;$$

a'_3 est une fonction de x et peut même être nul, a'_1 s'exprime par la formule

$$(16) \quad a'_1 = X y'^{m+1} + X_1 y',$$

où X et X_1 désignent des fonctions quelconques de x . Il est clair que la substitution

$$(17) \quad \frac{dy'}{y' dx} + \int X_1 dx = y$$

donne lieu d'abord à une relation telle que celle-ci

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} + (y - \int X_1 dx)^2 + 3a'_3 (y - \int X_1 dx) = X y'^m,$$

c'est-à-dire pareille à (3) et, comme conséquence, à une équation de même forme que (2).

L'invariant R de cette dernière est nul, puisque le système (17), (18) est joint à l'équation (15), pour laquelle

$$L_2$$

est égal à zéro.

L'analyse dont j'ai fait usage ne peut être acceptée, si l'équation (15) satisfait à l'une des conditions

$$j_1 = 1, \quad 0, \quad \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5}.$$

Les deux premiers cas sont corrélatifs, mais la formule (16) ne leur est point applicable; les substitutions indiquées ne conviennent pas au troisième et il est facile d'en voir la raison : j_1 ayant la valeur $\frac{4}{5}$, l'équation (15) est devenue

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} + \frac{X}{y^3} + X_1 y' = 0;$$

l'équation (2), correspondante, est caractérisée par

$$u_3 = 0$$

et n'admet pas d'autre transformation. Ces réserves faites, voici les conclusions déduites des remarques précédentes :

Les équations définies par les relations (14) ou, ce qui est la même chose, susceptibles de prendre cette forme

$$(19) \quad \frac{d^2 y'}{dx^2} + y'^{m+1} f(x) + y' F(x) = 0,$$

sont associées par couples, de telle façon qu'à l'équation (19) il en répond une seconde, de même espèce,

$$(20) \quad \frac{d^2 y'}{dx^2} + y_1^{\frac{m+1}{m}} f_1(x) + y_1 F_1(x) = 0,$$

et facile à calculer. L'intégration de l'une d'elles entraîne celle de l'autre.

Un cas exceptionnel se présente quand $3 - 2h$ s'évanouit.

S'il arrive alors que R soit égal à zéro, ce qui s'exprime par la relation

$$\begin{aligned} b_1 \frac{d}{dx} \left[2g_2 - \left(\frac{db_1}{dx} + 3b_1 b_2 \right) \right] \\ + 3b_1^2 g_3 + \left(2g_2 - \frac{db_1}{dx} \right) \left[2g_2 - \left(\frac{db_1}{dx} + 3b_1 b_2 \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

l'équation (8) cesse de renfermer y et se change en celle ci

$$(21) \quad b_1^2 \frac{d \log \eta}{dx} + \left(2g_2 - \frac{db_1}{dx} \right) \left(\frac{db_1}{dx} + 3b_1 b_2 - g_2 \right) = 0,$$

faisant obtenir η par une quadrature. Le problème se réduit donc à l'étude de l'équation (3), déterminée maintenant d'une façon complète et à laquelle équivaut une équation différentielle linéaire, du second ordre.

Ce résultat, joint à ceux que j'ai indiqués (§ VII), permet d'énoncer la proposition suivante :

Toute équation de cette nature

$$dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0,$$

qui satisfait aux conditions invariantes

$$v_3 = 0, \quad u_3 = 6, \quad R = 0,$$

peut être reconnue et ramenée à la forme canonique

$$(22) \quad \begin{cases} dx' d^2 y' - dy' d^2 x' + 3(b_1 y' + b_2) dx'^2 dy' \\ \quad + (3g_2 y'^2 + 3g_3 y' + g_4) dx'^3 = 0 \end{cases}$$

par des opérations algébriques et différentielles. Cela fait, l'intégration ne dépend que d'une équation différentielle, linéaire et du second ordre, dont un coefficient renferme un paramètre. Ce paramètre et le rapport des constantes qui figurent dans l'intégrale de l'équation linéaire sont les arbitraires appartenant à l'intégrale générale de l'équation proposée.

J'ajoute que, R n'étant pas supposé nul, l'équation (22) se transforme en l'une de celles ci

$$\begin{aligned} dx d^2 y - dy d^2 x + [y \log y f(x) + y F(x)] dx^3 &= 0, \\ dx d^2 y_1 - dy_1 d^2 x + [e^{-y_1} f_1(x) + F_1(x)] dx^3 &= 0, \end{aligned}$$

qui sont, par suite, corrélatives.

Ce sont les cas déterminés ainsi

$$j_1 = 0, \quad j_2 = 1$$

et dont la liaison a déjà été remarquée.

Enfin, chacune des équations suivantes

$$dx d^2y - dy d^2x + [y^3 f(x) + y F(x)] dx^3 = 0$$

se change, par les substitutions (3), en une autre de la même catégorie et intégrable avec elle, mais ne satisfaisant point en général à la dernière des conditions (14).

§ XI.

Les recherches exposées dans ce paragraphe concernent les cas dans lesquels l'équation différentielle

$$(1) \quad dx d^2y - dy d^2x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0$$

définit les lignes géodésiques d'une certaine surface. La condition pour qu'il en soit ainsi est invariante par toutes les substitutions

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

et son expression s'obtient comme je vais l'indiquer.

Les notations sont celles des §§ I et II de ce Mémoire; en outre, je représente ainsi

$$(2) \quad ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

le carré de l'élément linéaire sur les surfaces correspondantes à l'équation (1), écrivant d'ailleurs, pour abréger,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta = EG - F^2, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = 2m, & \frac{\partial E}{\partial y} = 2m'; \\ \frac{\partial F}{\partial x} = m' + n, & \frac{\partial F}{\partial y} = m'' + n', \\ \frac{\partial G}{\partial x} = 2n', & \frac{\partial G}{\partial y} = 2n''. \end{array} \right.$$

Dans ses célèbres *Disquisitiones circa superficies curvas*, Gauss a établi un résultat fondamental qui peut être énoncé de cette manière.

Le système suivant

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta \zeta^{(0,2)} + (n'' F - m'' G) \zeta^{(1,0)} + (m'' F - n'' E) \zeta^{(0,1)} = \Gamma D'', \\ \Delta \zeta^{(1,1)} + (n' F - m' G) \zeta^{(1,0)} + (m' F - n' E) \zeta^{(0,1)} = \Gamma D', \\ \Delta \zeta^{(2,0)} + (n F - m G) \zeta^{(1,0)} + (m F - n E) \zeta^{(0,1)} = \Gamma D \end{cases}$$

est vérifié lorsque ζ désigne en général les coordonnées cartésiennes d'un point appartenant aux surfaces (2); Γ une quantité correspondante de ce groupe

$$(5) \quad \Gamma_1 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x}, \quad \Gamma_2 = \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta_3}{\partial y}, \quad \dots,$$

formé avec les trois expressions

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3$$

qu'admet ζ ; D, D', D'' les déterminants, du second ordre,

$$(6) \quad \begin{cases} D = \Sigma \pm \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial x^2}, \\ D' = \Sigma \pm \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial x \partial y}, \\ D'' = \Sigma \pm \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Les relations (4) sont semblables à celles dont j'ai déjà fait usage (6', § I) et que j'ai associées à l'équation (1); la définition même des lignes géodésiques conduit immédiatement à ce théorème :

Si l'on substitue le système (4) à celui-ci

$$(7) \quad p(\zeta), \quad p'(\zeta), \quad p''(\zeta)$$

dans la théorie générale, l'équation différentielle associée

$$dx d^2 y - dy d^2 x + a_1 dy^3 + 3a_2 dy^2 dx + 3a_3 dy dx^2 + a_4 dx^3 = 0$$

représente les lignes géodésiques des surfaces (2).

Or je puis écrire, dans cette hypothèse, les équations

$$(8) \quad \begin{cases} p_{0,1} = \frac{1}{\Delta}(n'' F - m'' G), & p_{1,0} = \frac{1}{\Delta}(m'' F - n'' E), \\ p'_{0,1} = \frac{1}{\Delta}(n' F - m' G), & p'_{1,0} = \frac{1}{\Delta}(m' F - n' E), \\ p''_{0,1} = \frac{1}{\Delta}(n F - m G), & p''_{1,0} = \frac{1}{\Delta}(m F - n E), \end{cases}$$

$$(8') \quad p_0 = 0, \quad p'_0 = 0, \quad p''_0 = 0,$$

dont les premières équivalent à cet ensemble

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} + 2E p''_{0,1} + 2F p''_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial y} + 2E p'_{0,1} + 2F p'_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + E p'_{0,1} + F(p''_{0,1} + p'_{1,0}) + G p''_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + E p_{0,1} + F(p'_{0,1} + p_{1,0}) + G p'_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + 2F p'_{0,1} + 2G p'_{1,0} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial y} + 2F p_{0,1} + 2G p_{1,0} = 0. \end{cases}$$

Il est facile d'ailleurs de reconnaître que les coefficients

$$p_{k,i}, \quad p'_{k,i}, \quad \dots$$

ainsi déterminés remplissent les conditions

$$\varepsilon'_{0,1} = \varepsilon_{1,0}, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon'_0 = 0,$$

imposées d'abord aux systèmes différentiels, tels que (6', § I). On déduit

en effet de (9)

$$(10) \quad \begin{cases} \epsilon'_{0,1} E + \epsilon'_{1,0} F = 0, \\ \epsilon_{0,1} E + (\epsilon_{1,0} - \epsilon'_{0,1}) F - \epsilon'_{1,0} G = 0, \\ \epsilon_{0,1} F + \epsilon_{1,0} G = 0, \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\epsilon'_{0,1} = \epsilon_{1,0},$$

et les deux relations $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon'_0 = 0$ sont évidentes à cause de (8').

En conséquence, d'après les formules (13, § I), on doit avoir

$$(11) \quad \begin{cases} p_{0,1} = a_1, & p_{1,0} = \frac{2 \partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} - a_2, \\ p'_{0,1} = a_2 + \frac{\partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial y}, & p'_{1,0} = \frac{\partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} - a_3, \\ p''_{0,1} = a_3 + \frac{2 \partial \log \delta^{-\frac{1}{3}}}{\partial x}, & p''_{1,0} = -a_4, \end{cases}$$

et voici comment ces expressions permettent de représenter le système (9) :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (E \delta^{-\frac{1}{3}}) + 2a_3 E \delta^{-\frac{1}{3}} - 2a_4 F \delta^{-\frac{1}{3}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} (G \delta^{-\frac{1}{3}}) + 2a_1 F \delta^{-\frac{1}{3}} - 2a_2 G \delta^{-\frac{1}{3}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} (E \delta^{-\frac{1}{3}}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (F \delta^{-\frac{1}{3}}) - 2(a_3 F \delta^{-\frac{1}{3}} - 2a_2 E \delta^{-\frac{1}{3}} + a_4 G \delta^{-\frac{1}{3}}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (G \delta^{-\frac{1}{3}}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (F \delta^{-\frac{1}{3}}) + 2(a_2 F \delta^{-\frac{1}{3}} - 2a_3 G \delta^{-\frac{1}{3}} + a_1 E \delta^{-\frac{1}{3}}) = 0. \end{cases}$$

J'ajoute qu'on en conclut aussi

$$d \log \Delta + 2(p''_{0,1} + p'_{1,0}) dx + 2(p'_{0,1} + p_{1,0}) dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta = C \delta^2,$$

C désignant une constante arbitraire.

Ainsi donc, afin que l'équation différentielle (1) appartienne à des lignes géodésiques, il faut que les relations linéaires

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + 2a_3 \psi_1 - 2a_4 \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + 2a_1 \psi_2 - 2a_2 \psi_3 = 0; \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - 2(a_3 \psi_2 - 2a_2 \psi_1 + a_4 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + 2(a_2 \psi_2 - 2a_3 \psi_3 + a_1 \psi_1) = 0 \end{cases}$$

soient satisfaites par les trois inconnues qu'elles renferment. Lorsqu'elles le sont, il suffit de prendre

$$E\delta^{-\frac{1}{3}} = \psi_1, \quad F\delta^{-\frac{1}{3}} = \psi_2, \quad G\delta^{-\frac{1}{3}} = \psi_3$$

et

$$C\delta^2 = EG - F^2;$$

les formules (8) étant alors applicables, les liaisons établies entre les coefficients du système (7) et de son équation associée,

$$p_{0,1} = a_1, \quad 2p'_{0,1} - p_{1,0} = 3a_2, \quad p''_{0,1} - 2p'_{1,0} = 3a_3, \quad -p''_{1,0} = a_4,$$

rendent cette dernière identique à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces (2); de plus, en posant

$$\psi_1 \psi_3 - \psi_2^2 = \varphi,$$

le carré de l'élément linéaire s'obtient sous la forme simple

$$(14) \quad ds^2 = \frac{C^2}{\varphi^2} (\psi_1 dx^2 + 2\psi_2 dx dy + \psi_3 dy^2).$$

Il est facile de voir comment les égalités (13) déterminent une propriété des systèmes linéaires associés à l'équation (1). Quel que soit en effet le système auquel on s'arrête, l'invariant dq , dont j'ai donné la définition,

§ III, vérifie ces deux conditions

$$(15) \quad \begin{cases} dx d^2 q - dq d^2 x + dq(p_{0,1} dy^2 + 2p'_{0,1} dx dy + p_{0,1} dx^2) = 0, \\ dy d^2 q - dq d^2 y + dq(p''_{1,0} dx^2 + 2p'_{1,0} dx dy + p_{1,0} dy^2) = 0, \end{cases}$$

immédiatement déduites des formules (16, § II), satisfaites aussi par l'invariant z quand les valeurs (8') sont adoptées.

Afin que le groupe (15), équivalent à l'équation (1) elle-même, admette une intégrale telle que celle-ci

$$(16) \quad \delta^{\frac{1}{2}} \left[\psi_1 \left(\frac{dx}{dq} \right)^2 + 2\psi_2 \frac{dx}{dq} \frac{dy}{dq} + \psi_3 \left(\frac{dy}{dq} \right)^2 \right] = \text{const.},$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 doivent être assujetties aux relations (13). Or on décide sans peine s'il en peut être ainsi, car deux des inconnues qu'elles contiennent s'expriment en fonction linéaire de la troisième et de ses dérivées. Cette dernière est donc liée à ses dérivées des trois premiers ordres par deux équations du premier degré, se présentant d'ailleurs presque sans calcul. Toute la question est ainsi réduite à l'étude du problème suivant :

Étant données deux équations *linéaires*, où figure une même inconnue avec ses dérivées partielles des trois premiers ordres, établir l'existence d'une ou plusieurs solutions communes et trouver ces solutions.

Par une suite d'identités simples, semblables à celles que j'ai remarquées dans un autre travail (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 7 décembre 1885), les équations proposées en entraînent de nouvelles, jusqu'à ce qu'un système complet ait été construit. Les différents cas sont alors distingués comme il suit :

Si les fonctions ψ n'ont qu'une seule expression possible, abstraction faite de la constante arbitraire qui les multiplie, le système (13) fait connaître toutes leurs dérivées logarithmiques et l'unique condition nécessaire pour qu'elles soient compatibles; l'élément correspondant (14) s'obtient alors par une quadrature.

Si les inconnues s'expriment de deux manières distinctes, le système

complet équivaut à quatre équations entre l'inconnue choisie et ses dérivées partielles des deux premiers ordres. On sait ramener cet ensemble à une équation différentielle du second ordre et linéaire, où n'entre qu'une variable indépendante, avec un paramètre. Soient déduites de cette équation deux solutions, (ψ_1, ψ_2, ψ_3) et (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) , appartenant aux équations (13), le rapport

$$\frac{\psi_1 dx^2 + 2\psi_2 dx dy + \psi_3 dy^2}{\Psi_1 dx^2 + 2\Psi_2 dx dy + \Psi_3 dy^2},$$

égalé à une constante, ne contient plus dq et donne manifestement une intégrale de l'équation proposée. Celle-ci, d'ailleurs, appartient à des lignes géodésiques; le principe du dernier multiplicateur lui est donc applicable, ce qui achève l'intégration, et, comme il est établi que les surfaces correspondantes sont celles dont l'élément de longueur est réductible à la forme

$$(17) \quad [f(u) - F(v)](du^2 + dv^2)$$

ou à celle-ci

$$(18) \quad [u + F(v)] du dv,$$

découverte par M. Lie, j'ai en définitive démontré le théorème suivant :

L'équation proposée représente les lignes géodésiques des surfaces (17) ou (18), quand le système (13) admet deux solutions distinctes; des opérations faciles permettent de reconnaître s'il en est ainsi et, dans ce cas, l'intégration ne dépend que d'une équation différentielle du second ordre et linéaire.

Les surfaces (17) peuvent être de révolution, les fonctions $f(u)$, $F(v)$ étant déterminées à cet effet : les fonctions ψ s'expriment dans ce cas à l'aide d'une seule variable, convenablement choisie. L'équation (1), pour laquelle il arrive que l'invariant ν , s'évanouit, est réductible à l'équation du premier ordre, déjà trouvée § IX,

$$\frac{dY'}{dX} + A_1 Y'^3 + 3A_2 Y'^2 + 3A_3 Y' + A_4 = 0,$$

76 R. LIOUVILLE. — SUR LES INVARIANTS DE CERTAINES ÉQUATIONS, ETC.
 mais ici l'intégration en est immédiate; car l'expression

$$A_2 \frac{dA_1}{dX} - A_1 \frac{dA_2}{dX} + A_1 (A_1 A_4 - A_2 A_3) + 2 A_2 (A_2^2 - A_1 A_3)$$

est nulle, ce qui est un cas précédemment étudié. [Cf. *Sur quelques équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVII^e Cahier, 1887)].

Je mentionne encore ce résultat, dont il n'est pas utile, je crois, de donner la preuve : Quand l'équation (1) représente des lignes géodésiques et que v_3 est nul, un groupe de ces lignes, donné par l'équation du premier ordre

$$L_1 dx + L_2 dy = 0,$$

et appartenant aux surfaces (2), forme un système orthogonal avec les courbes tracées sur ces mêmes surfaces de telle façon que la mesure de la courbure y soit une constante.

CONCLUSIONS.

Les premiers résultats établis dans ce Mémoire avaient été énoncés sans démonstration dans une Note insérée, le 28 novembre 1887, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

La méthode employée pour les obtenir est susceptible d'une généralisation facile; j'exposerai dans un prochain Mémoire comment elle permet d'étudier certains systèmes d'équations différentielles, parmi lesquels sont compris comme cas particulier ceux qui définissent le mouvement d'un ensemble de points soumis à l'action d'un potentiel.



SUR L'INTENSITÉ DE LA LUMIÈRE;

PAR M. J. MOUTIER.

L'intensité de la lumière s'introduit dans la théorie de l'Optique comme une quantité proportionnelle à la force vive du mouvement vibratoire qui constitue la lumière : l'intensité de la lumière dans un milieu est alors mesurée par le carré de l'amplitude du mouvement vibratoire. Cette définition de l'intensité de la lumière permet de comparer les effets que produisent, dans le même milieu, des radiations lumineuses de même période ; mais, lorsque l'on passe d'un milieu à un autre, il peut être utile de modifier un peu la notion d'intensité de la lumière.

Considérons une onde plane qui se propage dans un milieu avec la vitesse normale V . Appelons λ la longueur d'onde qui se rapporte à une couleur déterminée, τ la période du mouvement vibratoire : $\lambda = V\tau$.

Imaginons une vibration dirigée dans le plan de l'onde et ayant pour amplitude A . Prenons, dans le plan de l'onde, un élément superficiel ω . Si l'on désigne par ρ la densité de l'éther dans le milieu, la force vive qui correspond à une concamération de longueur λ est proportionnelle, comme on le sait, au produit $\omega\lambda\rho A^2$ ou, ce qui revient au même, au produit $\omega\rho VA^2$.

La force vive qui passe en un temps donné en un point du milieu est proportionnelle, d'une part au produit ρVA^2 , d'autre part au nombre des concamérations qui se succèdent en ce point ou à la vitesse de propagation V de la lumière. L'effet produit sur l'œil en un temps donné est mesuré par cette force vive ou par le produit $\rho V^2 A^2$: c'est ce produit que nous prendrons pour mesure de l'intensité de la lumière.

En appelant I l'intensité de la lumière, on aura, d'après la définition précédente, à un facteur près,

$$I = \rho V^2 A^2.$$

En remplaçant la vitesse de propagation en fonction de la longueur d'onde, on pourra écrire également, pour intensité de la lumière, à un facteur près,

$$I = \rho \lambda^2 A^2.$$

On va essayer de montrer que cette définition de l'intensité de la lumière peut s'appliquer à l'étude de divers phénomènes.

DOUBLE RÉFRACTION.

La théorie de la double réfraction, due au génie de Fresnel, repose sur l'élasticité de l'éther. On peut se demander s'il n'est pas possible d'arriver à la surface de l'onde, sans qu'il soit nécessaire de passer par la notion d'élasticité.

Imaginons en un point O d'un cristal des vibrations diversement orientées qui correspondent à une même intensité lumineuse : ces vibrations d'amplitudes différentes se propagent à l'intérieur du cristal avec des vitesses différentes. Si l'on appelle V la vitesse de propagation normale d'une onde plane, A l'amplitude d'une vibration dirigée dans le plan de l'onde, l'intensité de la lumière I est représentée, dans le cristal, à un facteur près, par la relation

$$I = V^2 A^2.$$

Prenons, à partir du point O , dans la direction de chaque vibration, une longueur OM égale à l'amplitude A de chaque vibration. La surface, lieu des points M , est entièrement déterminée : la vitesse de propagation de l'onde plane est inversement proportionnelle au diamètre correspondant de la surface considérée.

Il s'agit de déplacements qui sont, en réalité, très petits. Si l'on néglige,

dans l'équation de la surface, les puissances des coordonnées d'un point supérieures à la seconde puissance, la surface est un ellipsoïde, ayant pour centre le point O. La vitesse de propagation de l'onde plane est inversement proportionnelle au diamètre correspondant de l'ellipsoïde.

On peut imaginer telle direction de la vibration lumineuse qu'on le voudra ; mais il ne s'ensuit pas qu'une onde plane puisse propager indifféremment toute vibration située dans son plan. Dans l'ellipse, qui résulte de l'intersection de l'ellipsoïde par une onde plane passant au point O, les seules directions qui soient symétriquement placées par rapport à l'ellipse sont les deux axes de cette courbe : pour ces deux axes seulement, la symétrie du milieu assure la stabilité de la vibration lumineuse.

Si l'on admet que l'onde plane puisse propager uniquement les deux vibrations dirigées suivant les axes de l'ellipse correspondante, les vitesses normales de propagation sont inversement proportionnelles aux axes de l'ellipse ; on retrouve immédiatement la surface de l'onde, d'après la définition de Fresnel.

RÉFLEXION VITREUSE.

La théorie de la réflexion vitreuse donnée par Fresnel suppose que les vitesses de la lumière dans deux milieux isotropes sont inversement proportionnelles aux racines carrées des densités de l'éther dans ces deux milieux : cette hypothèse est incompatible avec le phénomène de la dispersion.

M. Jablonski a montré que cette hypothèse n'est pas nécessaire (') : la théorie de Cauchy, fondée sur le principe de la continuité du mouvement, donne la même valeur que la théorie de Fresnel pour l'amplitude de la vibration réfléchie lorsque la lumière est polarisée dans le plan d'incidence ; mais les deux théories indiquent des valeurs différentes pour l'amplitude de la vibration réfractée. La notion d'intensité de la lumière conduit assez rapidement aux résultats obtenus par M. Jablonski.

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. II, p. 441 ; 1886.

Il y a deux cas à distinguer, suivant que la lumière est polarisée dans le plan d'incidence ou dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence. Nous désignerons, dans les deux cas, par i et r les angles d'incidence et de réflexion, par λ et λ' les longueurs d'onde d'une lumière homogène dans les deux milieux isotropes, l'air et le verre par exemple, par ρ et ρ' les densités de l'éther dans ces deux milieux.

Lumière polarisée dans le plan d'incidence. — Désignons par a l'amplitude de la vibration incidente, par b l'amplitude de la vibration réfléchie, par c l'amplitude de la vibration réfractée.

L'équation des forces vives, qui exprime le partage de la force vive de l'onde incidente entre l'onde réfléchie et l'onde réfractée, est

$$a^2 \lambda \rho \cos i = b^2 \lambda \rho \cos i + c^2 \lambda' \rho' \cos r.$$

Considérons maintenant un plan mené dans l'air parallèlement à la surface du verre et à une très petite distance du verre : ce plan est la surface de séparation qui limite, d'une part la vibration incidente et la vibration réfléchie, d'autre part la vibration réfractée. On admet qu'il n'existe aucune différence de phase entre ces vibrations. Une molécule, située du côté de l'air, très près de la surface de séparation, possède à chaque instant une vitesse égale à la somme des vitesses de la vibration incidente et de la vibration réfléchie : cette molécule a pour amplitude $a + b$. Une molécule, située dans l'air du côté du verre, très près de la surface de séparation, a pour vitesse à chaque instant la vitesse de la vibration réfractée : désignons par γ l'amplitude de cette seconde molécule. Les deux molécules extrêmement voisines ont, à chaque instant, la même vitesse; les deux molécules ont la même amplitude.

On a donc, pour l'équation de continuité,

$$a + b = \gamma.$$

Le mouvement lumineux relatif à la seconde molécule a pour intensité, d'après la définition précédente, $\lambda^2 \rho \gamma^2$. Ce mouvement se transmet au

verre et garde la même intensité. L'intensité de la lumière dans le verre est $\lambda'^2 \rho' c^2$.

On a une troisième équation, qui exprime la condition de transparence du verre,

$$\lambda'^2 \rho' c^2 = \lambda^2 \rho \gamma^2.$$

Ces trois équations déterminent les amplitudes b , γ et c en fonction de l'amplitude a de la lumière incidente. On a

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} a, \\ \gamma &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} a, \\ c &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \frac{\lambda}{\lambda'} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} a. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi, en partant de la définition précédente de l'intensité de la lumière, les résultats obtenus par M. Jablonski au moyen de la théorie de Cauchy. L'amplitude de la vibration réfléchie a la même expression que dans la théorie de Fresnel; il n'en est pas de même pour l'amplitude de la vibration réfractée. Dans la théorie de Fresnel, cette amplitude est représentée par γ ; ici l'amplitude c de la vibration réfractée est une fraction de γ qui dépend du rapport des vitesses de la lumière dans les deux milieux ou de l'indice de réfraction et, en outre, du rapport des densités de l'éther dans ces deux milieux.

Lumière polarisée dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence. — Désignons toujours par a , b , c les amplitudes de la vibration incidente, de la vibration réfléchie et de la vibration réfractée.

L'équation des forces vives est, comme précédemment,

$$a^2 \lambda \rho \cos i = b^2 \lambda \rho \cos i + c^2 \lambda' \rho' \cos r.$$

La vibration incidente est située dans le plan d'incidence, perpendiculairement au rayon incident : elle fait avec la surface du verre un angle égal à l'angle d'incidence i . La vibration réfléchie est située dans le plan

d'incidence, perpendiculairement au rayon réfléchi : elle fait avec la surface du verre un angle égal à l'angle d'incidence i . La vibration réfractée est située dans le plan d'incidence, perpendiculairement au rayon réfracté : elle fait avec la surface du verre un angle égal à l'angle de réfraction r .

Une molécule située du côté de l'air, très près de la surface de séparation, a une vitesse dont la composante parallèle à la surface du verre est la somme des composantes des vitesses de la vibration incidente et de la vibration réfléchie dans cette direction : l'amplitude du mouvement dans cette direction est $(a + b)\cos i$. Une molécule située du côté du verre, très près de la surface de séparation, a pour vitesse, à chaque instant, la vitesse de la vibration réfractée; désignons par γ l'amplitude de cette seconde molécule : l'amplitude de cette molécule, comptée parallèlement à la surface du verre, a pour valeur $\gamma \cos r$. Les deux molécules extrêmement voisines ont à chaque instant la même vitesse dans la direction de la surface du verre : les deux molécules ont même amplitude dans cette direction.

On a donc, pour l'équation de continuité,

$$(a + b)\cos i = \gamma \cos r.$$

On a, en outre, pour exprimer la transparence du verre, la troisième équation

$$\lambda'^2 \rho' c^2 = \lambda^2 \rho \gamma^2.$$

Ces trois équations déterminent les amplitudes b , γ et c en fonction de l'amplitude a de la lumière incidente. On a

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)} a, \\ \gamma &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} a, \\ c &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \frac{\lambda}{\lambda'} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} a. \end{aligned}$$

L'amplitude de la vibration réfléchiée a la même expression que dans la théorie de Fresnel; il n'en est pas de même pour l'amplitude de la vibration réfractée. Dans la théorie de Fresnel, cette amplitude est représentée par γ ; ici l'amplitude de la vibration réfractée est une fonction de γ qui dépend du rapport des vitesses de la lumière dans les deux milieux ou de l'indice de réfraction et, en outre, du rapport des densités de l'éther dans ces deux milieux.

Lame de verre à faces parallèles. — Les formules précédentes permettent de calculer la modification qu'éprouve l'intensité de la lumière en traversant un prisme de verre ou une lame de verre à faces parallèles; il suffit d'appliquer successivement ces formules à la réfraction qu'éprouve la lumière en passant de l'air dans le verre et à la réfraction qu'éprouve la lumière en passant du verre dans l'air. Supposons, par exemple, une lame à faces parallèles. Considérons d'abord la lumière polarisée dans le plan d'incidence, qui a pour incidence i et pour amplitude a . L'amplitude c de la vibration réfractée est donnée par une formule précédente :

$$c = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \frac{\lambda}{\lambda'} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} a.$$

La lumière éprouve une seconde réfraction à la sortie de la lame. L'amplitude de la vibration incidente est alors c , l'angle d'incidence est r , l'angle de réfraction est i . L'amplitude de la vibration a' , à la sortie de la lame de verre, est, d'après la dernière formule,

$$a' = \frac{2 \sin i \cos r}{\sin(i+r)} \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} c.$$

En éliminant c entre les deux équations, on a

$$a' = \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)} a.$$

Lorsque la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'inci-

dence, on a, en conservant les mêmes notations,

$$c = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \frac{\lambda}{\lambda'} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} a,$$

$$a' = \frac{2 \sin i \cos r}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} c,$$

$$a' = \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} a.$$

Dans les deux cas, l'expression de a' en fonction de a est indépendante des longueurs d'onde λ et λ' , des densités de l'éther ρ et ρ' dans les deux milieux. Les intensités de la lumière à l'entrée de la lame de verre et à la sortie de la lame sont entre elles comme les carrés des amplitudes a et a' : des mesures photométriques effectuées sur la lumière incidente et sur la lumière à la sortie de la lame de verre doivent donner le même résultat dans la théorie de Fresnel et dans la théorie modifiée d'après Cauchy.

Il en est de même pour les images successives que donne une lame de verre par réflexion ou par réfraction : dans tous les cas, quel que soit le nombre des réflexions intérieures, la lumière éprouve une première réfraction à l'entrée de la lame de verre et une seconde réfraction à la sortie de la lame.

RÉFLEXION TOTALE.

Lorsque la lumière passe d'un milieu plus réfringent dans un milieu moins réfringent, les formules précédentes deviennent imaginaires dans le cas de la réflexion totale. Fresnel, par une interprétation des imaginaires, a découvert les lois de la réflexion totale; en même temps, il a institué plusieurs expériences qui ont confirmé les résultats de sa théorie; depuis, les expériences de Jamin ont vérifié d'une manière très complète les formules de Fresnel. On doit donc regarder ces formules, quelle que soit leur origine, comme une expression très exacte des phénomènes.

C'est aux formules de Fresnel qu'il faudra revenir toutes les fois que l'on voudra établir une théorie de la réflexion totale. Cauchy a retrouvé ces formules par une méthode directe, qui enlève tous les doutes que pré-

sente l'interprétation des imaginaires. On ne se propose pas ici d'indiquer une théorie de la réflexion totale; on essaiera seulement de montrer que la définition donnée précédemment pour l'intensité de la lumière peut servir à suivre le phénomène de la réflexion totale.

Fresnel a montré par une expérience directe que le mouvement lumineux, lors de la réflexion totale opérée entre le verre et l'air, se transmet à une couche d'air très voisine du verre, que l'on peut appeler, pour abrégé, la *couche d'air superficielle*. On peut concevoir, d'après cela, le phénomène de la réflexion totale de la manière suivante.

Un rayon lumineux incident AB, dirigé dans le verre, rencontre la surface du verre au point B et se continue dans la couche superficielle par une trajectoire lumineuse BMB', qui s'arrête en un point B' de la surface du verre; de ce point B' part le rayon lumineux réfléchi totalement B'A', dans une direction B'A' symétrique de AB par rapport à la normale à la surface du verre qui passe par le milieu de la droite BB'. Un rayon lumineux dirigé suivant la droite A'B' se réfléchit totalement en suivant la route inverse A'B'MBA : la trajectoire BMB' est, par suite, composée de deux parties symétriques par rapport à la normale menée à la surface du verre par le milieu de BB'; cette normale rencontre la trajectoire curviligne au point N, où la tangente à la courbe est parallèle à la surface du verre. La distance BB' est extrêmement petite, de sorte que le rayon incident AB et le rayon réfléchi B'A' semblent partir d'un même point de la surface du verre; en réalité, c'est au point N, sommet de la trajectoire curviligne, que s'établit le partage entre la lumière incidente et la lumière réfléchie.

Un rayon lumineux AB est la normale à l'onde plane, qui se propage à l'intérieur du verre; cette normale est le lieu des positions moyennes de la molécule lumineuse animée d'un mouvement vibratoire. C'est également de chaque côté de la trajectoire lumineuse BMB' que s'accomplit l'oscillation de la molécule lumineuse. Il en est de même pour le rayon réfléchi B'A'.

L'étendue de la trajectoire BMB' est très petite; mais la lumière emploie un certain temps pour parcourir cette trajectoire, de sorte qu'il existe

une différence de phase entre les vibrations lumineuses qui existent à un même instant aux deux points B et B'. Supposons l'amplitude de la vibration incidente égale à l'unité; l'amplitude de la vibration réfléchie sera également l'unité. La vibration au point B à l'instant t sera représentée par $\sin 2\pi \frac{t}{\tau}$, en désignant par τ la période du mouvement vibratoire. Désignons par θ le temps employé par la lumière pour parcourir la courbe BMB'. Le mouvement lumineux au point B' et à l'instant t est celui qui existait au point B au temps $t - \theta$: la vibration lumineuse au point B' et à l'instant t est représentée par $\sin 2\pi \frac{t - \theta}{\tau}$. La différence de phase $\frac{\theta}{\tau}$ dépend, non seulement de l'incidence, mais encore de la direction de la vibration lumineuse.

Il y a deux cas principaux à distinguer, suivant que la lumière est polarisée dans le plan d'incidence ou dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence.

1° *La lumière est polarisée dans le plan d'incidence.* — Les vibrations sont alors perpendiculaires au plan d'incidence.

Considérons d'abord un angle d'incidence α égal à l'angle limite. Désignons par ν et ν' les vitesses de la lumière dans l'air et dans le verre. L'indice de réfraction n de la lumière passant de l'air dans le verre est

$$n = \frac{\nu}{\nu'}.$$

L'angle limite α est donné par la relation

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} = \frac{\nu'}{\nu}.$$

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$\nu^2 \sin^2 \alpha = \nu'^2.$$

La quantité ν^2 mesure l'intensité de la lumière qui se propage avec la vitesse ν dans un milieu où la densité de l'éther est égale à l'unité, en sup-

posant l'amplitude de la vibration égale à l'unité. Prenons pour unité la densité de l'éther dans la couche superficielle; la quantité $\nu^2 \sin^2 \alpha$ représente, d'après la loi de Malus, l'intensité de la lumière incidente, prise dans la couche superficielle parallèlement à la surface du verre. La quantité ν'^2 mesure l'intensité de la lumière qui se propage avec la vitesse ν' dans la couche superficielle, en supposant l'amplitude de la vibration égale à l'unité. Ainsi, lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle limite, l'intensité de la lumière incidente prise dans la couche superficielle parallèlement à la surface du verre est égale à l'intensité de la lumière qui se propage dans la couche superficielle avec la même vitesse que dans le verre : cette propriété est indépendante de la direction des vibrations lumineuses.

Considérons maintenant un angle d'incidence i supérieur à l'angle limite α . Désignons par φ la différence de phase $\frac{\theta}{\tau}$. La vibration au point B' et à l'instant t est

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right) = \cos 2\pi \varphi \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - \sin 2\pi \varphi \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

La vibration au point B' peut être regardée comme la résultante de deux vibrations de même direction et de même période, qui ont pour amplitudes $\cos 2\pi \varphi$ et $\sin 2\pi \varphi$, et qui ont entre elles une différence de phase égale à $\frac{1}{4}$.

En général, si l'on désigne par θ , le temps employé par la lumière pour parcourir un arc BM de la trajectoire, par φ , la différence de phase correspondante $\frac{\theta_1}{\tau}$, la vibration au point M peut être regardée comme la résultante de deux vibrations de même direction et de même période, qui ont pour amplitudes $\cos 2\pi \varphi$, et $\sin 2\pi \varphi$, et qui ont entre elles une différence de phase égale à $\frac{1}{4}$. En particulier, au point N, sommet de la trajectoire, la valeur correspondante de φ , est $\frac{1}{2} \varphi$, et les vibrations composantes ont pour amplitudes $\cos \pi \varphi$ et $\sin \pi \varphi$.

Au sommet N de la trajectoire, l'incidence est terminée; l'intensité de la lumière incidente comptée dans la couche superficielle parallèlement à la surface du verre est $\nu^2 \sin^2 i$. Cette intensité se partage entre les deux

composantes d'amplitudes $\cos \pi\varphi$ et $\sin \pi\varphi$, dirigées parallèlement à la surface du verre.

Si l'on appelle u et u' les vitesses de propagation des deux composantes ayant pour amplitudes $\cos \pi\varphi$ et $\sin \pi\varphi$ à la fin de l'incidence, on a la relation

$$v^2 \sin^2 i = u^2 \cos^2 \pi\varphi + u'^2 \sin^2 \pi\varphi.$$

Lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle limite α , la différence de phase φ est nulle, $\sin \pi\varphi = 0$, $\cos \pi\varphi = 1$. La relation précédente se réduit à

$$v^2 \sin^2 \alpha = u^2.$$

Par suite, la vitesse de propagation u est égale à v .

Lorsque l'angle d'incidence est droit, $i = \frac{\pi}{2}$, la lumière rase le verre. La relation générale se réduit à

$$v^2 = v'^2 \cos^2 \pi\varphi + u'^2 \sin^2 \pi\varphi.$$

Le second membre de cette relation est alors indépendant de v' , ce qui exige $\cos \pi\varphi = 0$ ou $\sin^2 \pi\varphi = 1$. Par suite, la vitesse de propagation u' est égale à v .

Le rayon lumineux à la sortie du verre se dédouble en deux autres qui se propagent dans la couche superficielle avec des vitesses différentes, v et v' : à chacun de ces rayons lumineux correspond une trajectoire telle que BMB'. Les deux trajectoires ont leurs sommets sur une même perpendiculaire à la surface du verre.

En remplaçant u et u' par leurs valeurs v et v' , on a, pour déterminer la différence de phase φ , la relation

$$v^2 \sin^2 i = v'^2 \cos^2 \pi\varphi + v^2 \sin^2 \pi\varphi.$$

On en déduit, en passant des vitesses de la lumière à l'indice de réfraction,

$$\cos^2 \pi\varphi = \frac{n^2 \cos^2 i}{n^2 - 1}.$$

Lorsque l'angle d'incidence croît depuis l'angle limite jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, la phase φ croît de zéro à $\frac{1}{2}$.

On obtient immédiatement, pour valeur de $\cos 2\pi\varphi$,

$$\cos 2\pi\varphi = 2 \cos^2 \pi\varphi - 1 = \frac{n^2(1 - 2 \sin^2 i) + 1}{n^2 - 1}.$$

A un même cosinus correspondent deux arcs dont les sinus sont égaux et de signes contraires; mais ici, lorsque l'angle d'incidence augmente à partir de l'angle limite, la différence de phase φ part de zéro et devient positive : $\sin 2\pi\varphi$ est positif et a pour valeur

$$\sin 2\pi\varphi = \frac{2n \cos i}{n^2 - 1} \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}.$$

On retrouve ainsi, pour la différence de phase φ , la valeur indiquée par Fresnel.

2° *La lumière est polarisée dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence.* — Les vibrations sont alors dirigées dans le plan d'incidence et font avec la surface du verre un angle égal à l'angle d'incidence i .

Désignons par φ' la différence de phase, qui est l'analogue de φ .

A la fin de l'incidence, la vibration lumineuse a pour composantes deux vibrations d'amplitudes $\cos \pi\varphi'$ et $\sin \pi\varphi'$. Chacune de ces vibrations, dirigée dans le plan d'incidence, peut se décomposer en deux autres : l'une perpendiculaire à la surface du verre, l'autre parallèle à cette surface. Les composantes normales à la surface du verre ont pour amplitudes $\cos \pi\varphi' \sin i$ et $\sin \pi\varphi' \sin i$; les composantes parallèles à la surface du verre ont pour amplitudes $\cos \pi\varphi' \cos i$ et $\sin \pi\varphi' \cos i$.

Désignons par u , u' , u'' , u''' les vitesses de propagation de ces quatre dernières composantes. A la fin de l'incidence, l'intensité de la lumière incidente comptée parallèlement à la surface du verre est la somme des intensités relatives aux quatre composantes. On a la relation

$$\begin{aligned} v^2 \sin^2 i &= u^2 \cos^2 \pi\varphi' \sin^2 i + u'^2 \sin^2 \pi\varphi' \sin^2 i \\ &+ u''^2 \cos^2 \pi\varphi' \cos^2 i + u'''^2 \sin^2 \pi\varphi' \cos^2 i. \end{aligned}$$

Lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle limite α , la différence de phase φ' est nulle. La relation précédente se réduit à

$$\nu^2 \sin^2 \alpha = u^2 \sin^2 \alpha + u''^2 \cos^2 \alpha.$$

D'ailleurs, on sait que le second membre de cette relation est égal à ν'^2 . On en conclut que les vitesses de propagation u et u'' ont pour valeur commune ν' . La relation précédente devient

$$\nu^2 \sin^2 i = \nu'^2 \cos^2 \pi\varphi' + u'^2 \sin^2 \pi\varphi' \sin^2 i + u'''^2 \sin^2 \pi\varphi' \cos^2 i.$$

Lorsque l'angle d'incidence est droit, $i = \frac{\pi}{2}$, la relation se réduit à

$$\nu^2 = \nu'^2 \cos^2 \pi\varphi' + u'^2 \sin^2 \pi\varphi'.$$

La lumière rase alors le verre; le second membre de la relation doit être indépendant de ν' ; cela exige que l'on ait

$$\cos^2 \pi\varphi' = 0 \quad \text{et} \quad u'^2 = \nu^2.$$

La relation générale est alors

$$\nu^2 \sin^2 i = \nu'^2 \cos^2 \pi\varphi' + \nu^2 \sin^2 \pi\varphi' \sin^2 i + u'''^2 \sin^2 \pi\varphi' \cos^2 i.$$

La vibration d'amplitude $\sin \pi\varphi'$ a deux composantes d'amplitudes $\sin \pi\varphi' \sin i$ et $\sin \pi\varphi' \cos i$ qui se propagent nécessairement avec des vitesses inégales; si l'on suppose, en effet, que la vitesse u''' soit égale à la vitesse ν , on est ramené au cas précédent. Il faut donc admettre nécessairement que la seconde composante se propage avec la vitesse ν' ; mais en même temps l'amplitude de cette composante doit être modifiée.

Supposons, en effet, que cette composante d'amplitude $\sin \pi\varphi' \cos i$ se propage avec la vitesse ν ; le mouvement de la molécule lumineuse résulte de la composition de deux mouvements, dont l'un est le mouvement de propagation de vitesse ν et dont l'autre est le mouvement vibratoire; à un instant donné, le mouvement de la molécule lumineuse est dirigé dans

un certain sens. Si la vitesse de propagation devient ν' ou varie dans le rapport $\frac{\nu'}{\nu}$, l'amplitude doit varier dans le même rapport pour que la direction du mouvement au même instant ne soit pas changée. L'amplitude est alors $\frac{\nu'}{\nu} \sin \pi \varphi' \cos i$; l'intensité de la lumière correspondante est

$$\nu'^2 \frac{\nu'^2}{\nu^2} \sin^2 \pi \varphi' \cos^2 i;$$

en d'autres termes, on a

$$I^{M2} = \frac{\nu'^4}{\nu^2}.$$

La relation générale devient alors

$$\nu^2 \sin^2 i = \nu'^2 \cos^2 \pi \varphi' + \nu^2 \sin^2 \pi \varphi' \sin^2 i + \frac{\nu'^4}{\nu^2} \sin^2 \pi \varphi' \cos^2 i.$$

On en déduit, en passant des vitesses de la lumière à l'indice de réfraction,

$$\cos^2 \pi \varphi' = \frac{\cos^2 i}{n^2 (n^2 \sin^2 i - 1) + \cos^2 i}.$$

Lorsque l'angle d'incidence croît depuis l'angle limite jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, la différence de phase φ' croît de zéro à $\frac{1}{2}$.

On obtient immédiatement, pour valeur de $\cos 2\pi \varphi'$,

$$\cos 2\pi \varphi' = 2 \cos^2 \pi \varphi' - 1 = - \frac{n^2 (n^2 \sin^2 i - 1) - \cos^2 i}{n^2 (n^2 \sin^2 i - 1) + \cos^2 i}.$$

A un même cosinus correspondent deux arcs dont les sinus sont égaux et de signes contraires; mais ici, lorsque l'angle d'incidence augmente à partir de l'angle limite, la différence de phase φ' part de zéro et devient positive; $\sin 2\pi \varphi'$ est positif et a pour valeur

$$\sin 2\pi \varphi' = \frac{2n \cos i}{n^2 (n^2 \sin^2 i - 1) + \cos^2 i} \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}.$$

On retrouve ainsi, pour la différence de phase φ' , la valeur indiquée par Fresnel.

Pour une même incidence i , les phases φ et φ' sont en général différentes ⁽¹⁾; la réflexion totale imprime à un rayon de lumière naturelle la polarisation elliptique; mais ce n'est pas le lieu d'examiner ici les consé-

⁽¹⁾ On peut remarquer, en passant, que les phases φ et φ' sont liées entre elles par la relation très simple

$$\tan \pi \varphi' = n^2 \tan \pi \varphi.$$

La différence de phase $\varphi' - \varphi$ est donnée par la formule

$$\tan \pi (\varphi' - \varphi) = \frac{(n^2 - 1) \tan \pi \varphi}{1 + n^2 \tan^2 \pi \varphi} = \frac{n^2 - 1}{\frac{1}{\tan \pi \varphi} + n^2 \tan \pi \varphi}.$$

Lorsque l'angle d'incidence croît depuis l'angle limite jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, la différence de phase $\varphi' - \varphi$ part de zéro pour revenir à zéro; cette différence de phase passe par un maximum, qui correspond au minimum du dénominateur. Le produit des deux termes du dénominateur est constant; le dénominateur est minimum lorsque les deux termes sont égaux ou lorsque

$$\tan \pi \varphi = \frac{1}{n}.$$

Le maximum de la différence de phase est alors donné par la relation

$$\tan \pi (\varphi' - \varphi) = \frac{n^2 - 1}{2n}.$$

Lorsque la différence de phase est maximum, on a

$$\cos^2 \pi \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \pi \varphi} = \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

En remplaçant $\cos^2 \pi \varphi$ par la valeur trouvée précédemment, on a, pour l'angle d'incidence correspondant,

$$\sin^2 i = \frac{2}{n^2 + 1}.$$

Lorsque la différence de phase est maximum, on a

$$\tan \pi \varphi' = n.$$

Les arcs correspondants $\pi \varphi'$ et $\pi \varphi$ sont complémentaires: la somme des phases φ et φ' est égale à $\frac{1}{4}$ ou à la valeur maximum de l'une des phases φ ou φ' .

quences de la théorie de Fresnel : il s'agissait seulement de montrer que la définition donnée précédemment pour l'intensité de la lumière peut se prêter à l'étude de la réflexion totale.

On vient d'examiner l'interprétation que reçoivent deux phénomènes : la double réfraction et la réflexion vitreuse, lorsque l'on regarde, en général, l'intensité de la lumière comme étant proportionnelle à la force vive moyenne du mouvement vibratoire et à la vitesse de propagation de la lumière. Lorsqu'il s'agit d'un milieu isotrope, où la vitesse de propagation de la lumière est la même dans toutes les directions, il suffit de considérer la force vive moyenne ; mais, dans certains cas, il peut être utile de considérer la force vive du mouvement vibratoire à un instant donné.

INTERFÉRENCE DES RAYONS POLARISÉS.

Une expérience capitale de Fresnel et Arago a montré que deux rayons polarisés dans des plans perpendiculaires ne peuvent interférer : ce résultat s'interprète immédiatement si l'on admet que la vibration lumineuse soit parallèle ou perpendiculaire au plan de polarisation. Verdet a démontré que cette propriété est une conséquence nécessaire de l'expérience, si l'on représente les projections de la vibration sur trois axes rectangulaires par des fonctions sinusoïdales du temps ; cela revient à supposer que la polarisation soit elliptique. On peut affranchir la démonstration de cette restriction, en se reportant à la notion même d'interférence.

Lorsque deux sources lumineuses, dérivées d'une source unique, produisent des franges d'interférence, l'intensité de la lumière varie périodiquement dans l'étendue des franges. Au centre d'une frange brillante, l'intensité de la lumière est quadruple de l'intensité de la lumière émise par l'une des sources ; à partir de la frange brillante, l'intensité de la lumière décroît progressivement et devient nulle au centre de la frange obscure. L'intensité de la lumière, dans le champ où se forment les franges, n'est égale à la somme des intensités de la lumière émise par chacune des sources

que dans les seuls points situés à égale distance des franges brillantes et des franges obscures.

L'intensité de la lumière en un point est mesurée par la force vive moyenne du mouvement lumineux; mais, au lieu de cette force vive moyenne, on peut considérer la force vive du mouvement lumineux à un instant donné. On reconnaît alors facilement que la force vive du mouvement résultant n'est pas égale, en général, à la somme des forces vives des mouvements composants : aux points où la différence de phase est nulle, la force vive du mouvement résultant est égale au double de la somme des forces vives des mouvements composants au même instant; aux points où la différence de phase est $\frac{1}{2}$, la force vive du mouvement résultant est constamment nulle; aux points où la différence de phase est $\frac{1}{4}$, la force vive du mouvement résultant n'est égale à la somme des forces vives des mouvements composants au même instant qu'à des intervalles de temps égaux au quart de la période.

Ainsi, dans le cas des interférences, l'égalité entre la force vive du mouvement résultant à un instant donné et la somme des forces vives des mouvements composants au même instant n'a lieu qu'exceptionnellement en certains points du champ et à certaines époques; en général, l'égalité entre ces deux forces vives n'existe pas. On peut donc regarder l'égalité entre ces forces vives comme un caractère de non-interférence : c'est cette égalité que l'on serait conduit à admettre *a priori* si le phénomène des interférences était inconnu.

Soient deux sources lumineuses S et S', dérivées d'une source unique, qui envoient de la lumière en un point M, assez éloigné pour que l'on puisse regarder les deux droites SM et S'M comme ayant une même direction Mz. Les ondes lumineuses, émanées des sources S et S', se confondent alors, dans le voisinage du point M, avec un plan perpendiculaire à Mz. Le plan de polarisation du rayon SM coupe ce plan suivant une droite Mx; le plan de polarisation du rayon S'M coupe le même plan suivant une droite My, perpendiculaire à Mx.

Soient, à un instant donné, u , v , w les composantes suivant les trois axes Mx, My, Mz de la vitesse du mouvement lumineux envoyé au point M

par la source S. La force vive de ce mouvement lumineux est

$$u^2 + v^2 + w^2.$$

Supposons d'abord les deux plans de polarisation parallèles. Les distances du point M aux deux sources ont une différence qui varie avec la position du point M. Soient u' , v' , w' les composantes, à l'instant considéré, de la vitesse du mouvement lumineux envoyé au point M par la source S'. Faisons tourner ensuite le second plan de polarisation autour de Mz, de manière à faire coïncider Mx avec My. Les deux plans de polarisation sont perpendiculaires; la composante u' est dirigée suivant My, la composante v' est dirigée suivant le prolongement de Mx, la composante w' est dirigée suivant Mz. La force vive du second mouvement est, à l'instant considéré,

$$u'^2 + v'^2 + w'^2.$$

Lorsqu'il n'y a pas interférence, les forces vives des mouvements lumineux au point M s'ajoutent à chaque instant; la somme de ces deux forces vives est égale à la force vive du mouvement résultant. Il est facile de composer les deux mouvements lumineux envoyés au point M par les deux sources S et S'. A l'instant considéré, la vitesse du mouvement résultant a pour composantes, suivant les trois axes Mx, My, Mz,

$$u - v', \quad v + u', \quad w + w'.$$

La force vive du mouvement résultant à l'instant considéré est

$$(u - v')^2 + (v + u')^2 + (w + w')^2.$$

Lorsqu'il n'y a pas interférence, cette force vive est la somme des forces vives des deux mouvements composants. La condition de non-interférence des rayons polarisés est

$$ww' + vv' - uu' = 0.$$

Cette condition est indépendante de la différence de phase qui peut exister au point M entre les deux rayons lumineux. Lorsque le point M est tel que les mouvements soient concordants en ce point, on a, quel que

soit le temps, les relations

$$w' = w, \quad v' = v, \quad u' = u.$$

La condition de non-interférence des rayons lumineux se réduit alors à

$$w^2 = 0.$$

La vibration d'un rayon polarisé est donc située entièrement dans le plan de l'onde. La condition de non-interférence des rayons lumineux est alors ramenée à la relation

$$vu' - uv' = 0.$$

Cette condition est satisfaite de trois manières différentes :

Les composantes u et u' peuvent être nulles à tout instant ; la vibration du rayon polarisé est alors perpendiculaire au plan de polarisation.

Les composantes v et v' peuvent être nulles à tout instant ; la vibration du rayon polarisé est alors dirigée dans le plan de polarisation.

Lorsque ces composantes ne sont pas nulles à tout instant, la condition de non-interférence peut s'écrire

$$\frac{v}{u} = \frac{v'}{u'}.$$

Or $\frac{v}{u}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec le plan de polarisation la vibration du rayon SM, que l'on sait dirigée dans le plan de l'onde ; $\frac{v'}{u'}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que fait la vibration du rayon S'M avec le plan de polarisation de ce rayon. La condition de non-interférence revient à celle-ci : la vibration du rayon polarisé doit faire, avec le plan de polarisation, un angle indépendant de la phase du mouvement lumineux ; en d'autres termes, la vibration doit être rectiligne. Cette dernière solution est rejetée, comme on sait, par raison de symétrie.



COURBES REPRÉSENTATIVES

DES LOIS DU CHOC LONGITUDINAL ET DU CHOC TRANSVERSAL

D'UNE BARRE PRISMATIQUE,

DRESSÉES PAR FEU DE SAINT-VENANT,

Membre de l'Institut,

PUBLIÉES PAR M. FLAMANT,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Le présent travail a pour objet la publication des courbes dressées, il y a environ vingt-cinq ans, par M. de Saint-Venant, pour représenter graphiquement les lois du choc longitudinal et du choc transversal d'une barre prismatique heurtée à son extrémité ou à son milieu par un corps d'une masse comparable à la sienne. Ces courbes ont été gravées au trait, en 1873; mais l'auteur, distrait par d'autres travaux, ne les a jamais complétées par l'addition des lettres, cotes ou légendes nécessaires à leur intelligence. Il avait d'ailleurs été pris de scrupule au sujet de leur exactitude : les ordonnées de ces courbes sont, comme on verra, exprimées au moyen de séries convergentes dont il n'avait pris que les premiers termes, et il craignait que les termes négligés, bien que très petits, ne pussent, dans leur ensemble, modifier la forme des courbes qu'il avait déduite des premiers. Ce scrupule s'était surtout accentué depuis l'époque de la publication aux *Comptes rendus* ⁽¹⁾ des courbes représentatives des

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. 16, 23, 30 juillet et 6 août 1883.

lois du choc longitudinal d'après la solution en termes finis donnée par M. Boussinesq. Ces courbes, exactes, semblaient différer beaucoup de celles qu'il avait déduites des premiers termes des séries, bien que la différence fût, au fond, plus apparente que réelle.

Mais ce qui avait surtout empêché Saint-Venant de publier son travail, c'est cette remarque qu'il avait faite après coup, que si les courbes dressées par lui, et qui représentent les déplacements aux divers instants de tous les points de la barre heurtée, peuvent être obtenues avec une approximation suffisante en prenant un nombre assez grand de termes des séries qui expriment ces déplacements, il ne peut plus en être de même lorsqu'il s'agit de déterminer, ce qui est important en pratique, la dilatation maximum subie par chacun des éléments de la barre et le point de celle-ci où se produit le plus grand de ces maximums. Cette dilatation s'exprime, en effet, dans le cas du choc longitudinal, par la dérivée du déplacement de chaque point par rapport à son abscisse, ou par le coefficient angulaire de la courbe qui représente les déplacements, et, dans le choc transversal, par la courbure de l'axe neutre de la barre heurtée, laquelle s'exprime en fonction de la dérivée seconde du déplacement transversal. Or, les séries qui expriment les déplacements n'ont pas de dérivées, ou plutôt leurs dérivées sont des séries non convergentes dans lesquelles les termes les plus éloignés peuvent être du même ordre de grandeur que les premiers. Il n'y a donc pas à songer à les calculer. Aussi Saint-Venant avait-il simplement mesuré au compas les déclivités des courbes et leur courbure; mais il pensait que, en raison de l'incertitude qui restait sur la forme réelle de la courbe par suite des termes négligés, les résultats de cette mesure pouvaient être très différents de ceux qu'auraient donnés les courbes exactes, si l'on avait pu les tracer. La comparaison peut être faite pour le choc longitudinal, puisque ces courbes exactes sont connues; en ce qui concerne le choc transversal, il est impossible de savoir ce qu'elle donnerait. Quoiqu'il en soit, le travail de Saint-Venant a un intérêt suffisant pour justifier sa publication: il peut servir d'exemple en montrant comment, grâce à un labeur considérable par l'étendue duquel cet infatigable travailleur ne s'est pas laissé rebuter, les valeurs de ces séries à termes périodiques de pé-

riodes décroissantes peuvent être représentées graphiquement ; et il donne, tout au moins, sur les grandeurs de ces quantités, une première indication permettant de déduire des conséquences pratiques qui, si elles ne sont pas absolument exactes, n'en sont pas moins précieuses, puisqu'elles constituent tout ce que l'on sait sur ce sujet si important au point de vue de la stabilité des constructions.

Tout ce qui va suivre est extrait, à peu près textuellement, des notes ajoutées par Saint-Venant aux n^{os} 60 et 61 de l'édition française de la *Théorie de l'élasticité des corps solides*, de Clebsch. On peut donc dire que le travail tout entier, Planches et texte, est dû à cet illustre savant. Je n'y ai fait que quelques additions indispensables pour les comparaisons dont il est parlé plus haut, et je n'ai conservé que ce qui m'a semblé strictement nécessaire pour l'intelligence des figures.

I. — CHOC LONGITUDINAL.

Soit une barre prismatique homogène, supposée horizontale, pour n'avoir pas à tenir compte de l'action de la pesanteur, fixée à l'une de ses extrémités et heurtée à l'autre par un corps rigide animé d'une certaine vitesse. Ce choc diminuera ou augmentera la longueur de la barre, suivant que le corps heurtant, d'une forme quelconque, viendra à la rencontre de l'extrémité de la barre, ou selon que, d'une forme de manchon embrassant librement celle-ci, il viendra exercer son impulsion sur un bourrelet ou arrêt saillant dont la barre est munie tout autour de son extrémité libre. Nous supposons, dans un cas comme dans l'autre, que tous les points d'une même section transversale de la barre subissent le même déplacement, ou que les sections transversales restent planes.

Nous prendrons l'extrémité fixe de la barre pour origine des coordonnées x , comptées positivement suivant la longueur de la barre, et nous appellerons

a cette longueur ;

σ l'aire de la section transversale constante ;

ρ la densité de la matière constituant la barre ;

g l'accélération due à la pesanteur ;

$P = \rho g a \sigma$ le poids de la barre heurtée ;

Q le poids du corps heurtant ;

V sa vitesse à l'instant du choc ;

E le coefficient d'élasticité longitudinale de la matière de la barre ;

$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ la célérité de propagation des ébranlements ou du son dans la barre ;

$\tau = \frac{a}{\omega}$ le temps que met le son à parcourir la longueur de la barre ;

u le déplacement, à une époque t quelconque, d'une section transversale d'abscisse x .

Une tranche de la barre, comprise entre les deux sections σ d'abscisses x et $x + dx$, est sollicitée, en sens opposés, sur ces sections, par les tractions $-E\sigma \frac{\partial u}{\partial x}$ et $E\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right)$; son inertie est $-\rho \sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, en sorte que son équilibre dynamique est exprimé par

$$E\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ;$$

d'où, eu égard à la signification ci-dessous de ω , l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

A cette équation indéfinie doivent être jointes les équations définies résultant des conditions initiales ou aux limites, savoir : l'extrémité $x = 0$ fixe ; les vitesses de tous les points nulles à l'époque $t = 0$, à l'exception de celle de l'extrémité qui est égale à V ; enfin, l'équilibre dynamique du corps heurtant exprimé par la condition $-\frac{Q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $x = a$, ce qui s'exprime, en remplaçant dans cette dernière $E\sigma g$

par $\omega^2 \frac{P}{a}$, de la manière suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{pour } x = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = V & \text{pour } t = 0 \text{ et pour } x = a; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{pour } t = 0 \text{ et pour toute autre valeur de } x; \\ Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{P}{a} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } x = a. \end{cases}$$

L'équation indéfinie et les conditions limites sont satisfaites par la solution de Navier (en mettant τ au lieu de $\frac{a}{\omega}$)

$$(3) \quad u = V\tau \sum \frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mx}{a} \sin \frac{mt}{\tau},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m , racines réelles et positives de l'équation transcendante

$$(4) \quad m \operatorname{tang} m = \frac{P}{Q}.$$

La première chose à faire est de trouver ces racines, en nombre infini, pour une valeur donnée du rapport $\frac{P}{Q}$. Saint-Venant a opéré graphiquement : il a donné des courbes (qui ne sont pas reproduites ici) qui donnent, pour une valeur quelconque de ce rapport comprise entre 0 et 6, les racines cherchées, ou plutôt les différences $m - n\pi$, entre ces racines et les multiples successifs de π , lesquelles vont en diminuant à mesure que n augmente, tandis que les valeurs des racines croissent indéfiniment. Le calcul graphique des racines et les épures subséquentes ont été faits pour cinq valeurs du rapport $\frac{P}{Q}$: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 et 4; les épures préparatoires ne sont reproduites que pour le premier cas $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$; pour les autres, on donne seulement les résultats définitifs.

Les racines m de l'équation transcendante (4) étant calculées et dési-

gnées par m_0, m_1, m_2, \dots pour la valeur $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$, on peut d'abord, pour un point donné de la barre ou pour une valeur donnée de x , considérée comme constante, tracer les sinusoides dont les ordonnées sont

$$\frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mx}{a} \sin \frac{mt}{\tau},$$

et les abscisses, le temps ou plutôt les rapports $\frac{t}{\tau}$. On aura, pour chaque point de la barre, une infinité de sinusoides correspondant à toutes les racines m_0, m_1, m_2, \dots . Ces courbes ont été tracées pour cinq points de la barre, ou pour cinq valeurs de x , ou du rapport $\frac{x}{a} : 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$ et 1, cette dernière correspondant au point heurté. Ce sont les courbes en traits légers de la *Pl. I*; sur chacune d'elles se trouve l'indication m_0, m_1, \dots de la racine à laquelle elle s'applique.

En additionnant, au compas, les ordonnées de ces sinusoides pour un même point, on obtient les courbes en traits plus forts, qui représentent les déplacements u de ces points, ou plutôt les rapports $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$. Il n'a été construit, pour chaque point, qu'un petit nombre de sinusoides, parce que, aussitôt que m devient un peu grand, ces courbes ne diffèrent plus sensiblement de l'axe des abscisses. Pour les quatre premiers points

$$\frac{x}{a} = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8,$$

Saint-Venant en a construit cinq, marquées m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 , et, pour le dernier point (le point heurté) $\frac{x}{a} = 1$, il en a tracé deux seulement : m_0 et m_1 ; la seconde s'écarte déjà très peu de la ligne droite comparativement à la première, et les ordonnées de la troisième auraient été absolument inappréciables. Les courbes sinueuses, en gros traits, ainsi obtenues, présentent des formes qui, tout d'abord, paraissent fort irrégulières, mais dont la physionomie se simplifie par les remarques suivantes. Chacune de ces courbes coupe la sinusoïde principale m_0 du point corres-

pendant en des points ayant des abscisses voisines de 1, 2, 3, 4, 5, et entre chacun de ces points d'intersection elle ne présente qu'un maximum d'écart de cette sinusoïde; entre deux points successifs d'écart maximum, situés de part et d'autre de la sinusoïde principale, la courbe diffère peu d'une ligne droite, ou du moins n'a qu'une courbure ou des inflexions très faibles; enfin, les points d'écart maximum ont des abscisses qui croissent sensiblement en progression arithmétique lorsqu'on va de la courbe du point $x = a$ à celle du point $x = 0$, correspondant à l'extrémité fixe, qui n'est pas représentée sur la figure, et que l'on retourne de celle-ci à celle $x = a$, et ainsi de suite ⁽¹⁾. Et il est alors facile de voir que ces courbes sinueuses ressemblent beaucoup aux courbes discontinues (anguleuses) de la *fig.* 3, reproduite ci-contre, du Mémoire cité du 23 juillet 1883, et qui représentent exactement les mouvements des divers points de la barre heurtée. Il ne faut prendre, dans cette figure, que la courbe marquée $r = \frac{1}{4}$, et observer que l'origine des coordonnées $x = 0$ y est placée au point heurté au lieu d'être à l'extrémité fixe comme dans la *Pl. I*, et aussi que cette figure ne donne les déplacements que de quatre points $\frac{x}{a} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ de la barre, dont aucun, sauf le point heurté, ne coïncide avec ceux dont le mouvement est figuré dans la planche.

(1) Si le lecteur veut prendre la peine de marquer, sur les ordonnées des abscisses $\frac{t}{\tau} = 1, 3, 5$, les points correspondant à $\frac{x}{a} = 0$, lesquels se trouveront au-dessous du cadre de la planche, à 0^m,018 environ, et de joindre par des lignes droites successives les points ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\tau} = 0, \frac{x}{a} = 1\right); & \quad \left(\frac{t}{\tau} = 1, \frac{x}{a} = 0\right); & \quad \left(\frac{t}{\tau} = 2, \frac{x}{a} = 1\right); \\ \left(\frac{t}{\tau} = 3, \frac{x}{a} = 0\right); & \quad \left(\frac{t}{\tau} = 4, \frac{x}{a} = 1\right); & \quad \left(\frac{t}{\tau} = 5, \frac{x}{a} = 0\right), \end{aligned}$$

il reconnaîtra que les points d'intersection de ces lignes droites, avec les lignes horizontales correspondant aux diverses valeurs de $\frac{x}{a}$, ont sensiblement les mêmes abscisses que les points où les courbes des déplacements s'écartent le plus de la sinusoïde principale m_0 , et où elles ont leur plus grande courbure. J'ai indiqué par des étoiles quelques-uns de ces points.

struire, pour chaque époque t , la courbe ayant pour ordonnées les mêmes déplacements u , et pour abscisses les x et non plus le temps. On pourrait déduire ces nouvelles courbes des précédentes, supposées construites pour un très grand nombre de points de la barre, et non pour cinq points seulement; mais on peut aussi les construire directement comme a fait Saint-Venant, au moyen des figures auxiliaires des *Pl. II* et *III*. Les courbes de la *Pl. II* sont des sinusoides analogues à celles de la *Pl. I*, dont les abscisses sont encore les temps ou les rapports $\frac{t}{\tau}$, et les ordonnées les valeurs de $\frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mt}{\tau}$ pour les diverses racines de l'équation (4) dans laquelle $\frac{P}{Q}$ est fait successivement égal à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 et 4. Ces courbes donnent, pour une valeur quelconque de t , la hauteur de la sinusoïde dont les abscisses sont les rapports $\frac{x}{a}$, et dont l'ordonnée est

$$\frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mt}{\tau} \sin \frac{mx}{a}.$$

On peut donc construire, pour autant de valeurs de t qu'on le voudra, la sinusoïde correspondante, dont l'abscisse sera $\frac{x}{a}$. C'est ce qui a été fait dans la *Pl. III*, dont la légende explique suffisamment la signification.

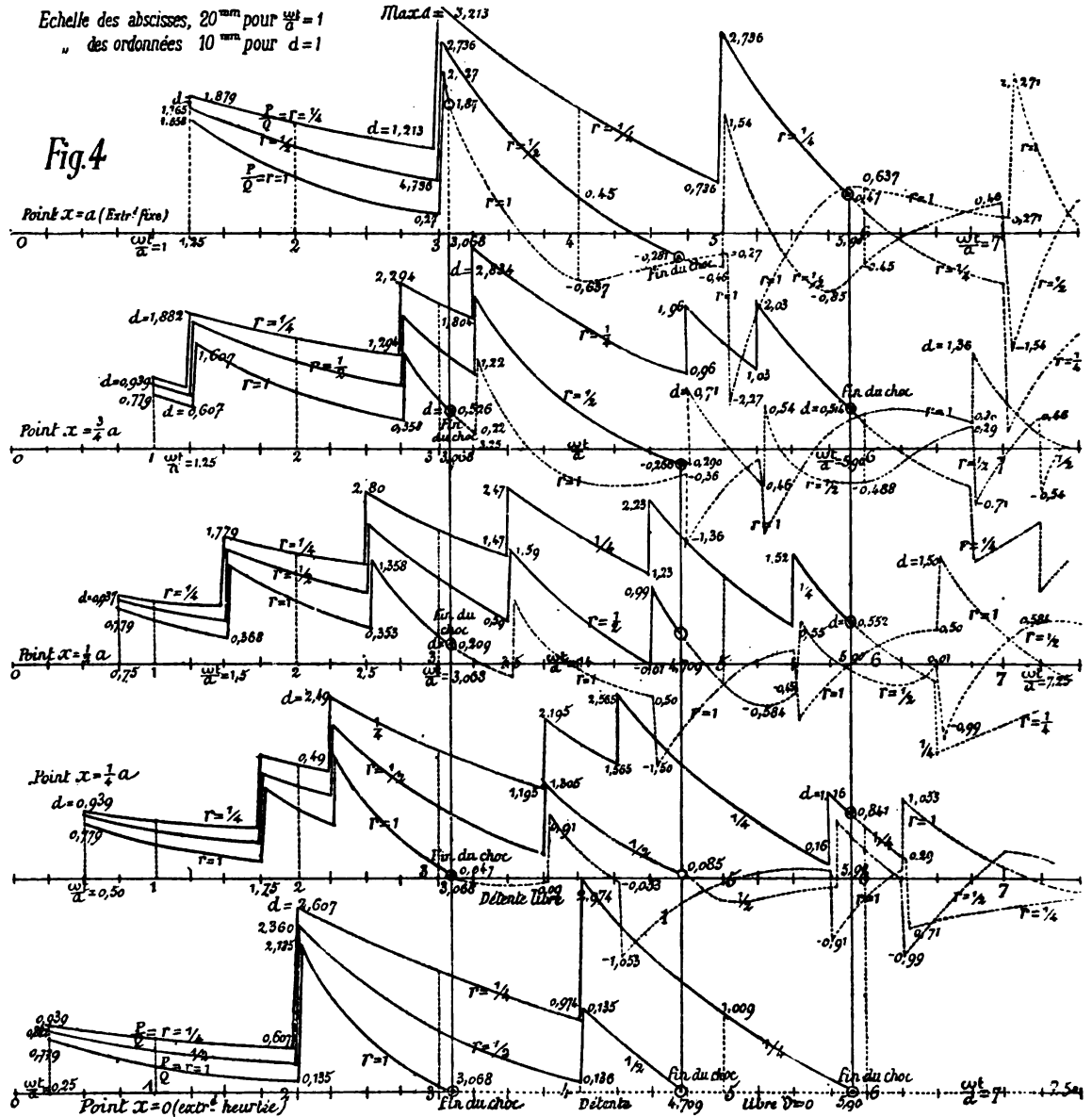
Au moyen de ces courbes de la *Pl. III* ont été dressées celles de la *Pl. IV*, qui donnent la solution complète du problème. Cette planche contient deux genres de courbes, qui ont toutes deux pour ordonnées les déplacements ou plutôt les valeurs du rapport $\frac{u}{V\tau}$. Les premières, celles en traits légers, ont pour abscisses les valeurs de $\frac{x}{a}$; chacune d'elles correspond donc à une époque déterminée ou à une valeur du rapport $\frac{t}{\tau}$ qui se trouve inscrite à côté d'elle. Les ordonnées de ces courbes ont été obtenues par l'addition, au compas, de celles des courbes de la *Pl. III* pour une même abscisse $\frac{x}{a}$ et une même époque $\frac{t}{\tau}$ correspondant aux sept valeurs calculées $m_0, m_1, m_2, \dots, m_6$. Ce sont les coefficients angulaires des

tangentes à ces courbes qui peuvent servir à donner les valeurs du rapport

Choc longitudinal d'une barre P de longueur a par un corps Q avec une vitesse V

Lois des dilations ou contractions $d = \frac{du}{u}$ de ses divers éléments. Courbes ayant, pour trois suppositions $\frac{P}{Q} = r = 1, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ et pour les cinq points $x = 0, \frac{1}{4}a, \frac{1}{2}a, \frac{3}{4}a$ et a , des abscisses $\frac{wt}{a}$ indiquant les temps t , et des ordonnées $d = \frac{du}{u}$ ($-d$) indiquant les déformations.

Echelle des abscisses, 20 mm pour $\frac{wt}{a} = 1$
 „ des ordonnées 10 mm pour $d = 1$



$\frac{du}{u}$ ou de la dilatation maximum en un point donné de la barre. On reconnaît facilement que celle des courbes pour laquelle l'inclinaison de la tan-

gente est la plus grande est celle qui correspond à l'époque $\frac{t}{\tau} = 3,25$, et que le maximum se produit à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire à l'extrémité fixe de la barre. Saint-Venant a tracé une ligne ponctuée représentant la tangente à l'origine, et dont l'inclinaison, mesurée à l'échelle, a été trouvée de $2,825 \frac{V\tau}{a}$. Telle serait, pour $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$, la valeur de la plus grande dilatation, au point fixe de la barre, et cette dilatation maximum se produirait à l'époque $\frac{t}{\tau} = 3,25$.

Or, si l'on se reporte à la *fig. 4*, reproduite ci-contre, du Mémoire cité des *Comptes rendus* de juillet 1883, on verra que, pour $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$, la dilatation maximum se produit effectivement à l'époque $\frac{t}{\tau} = 3,0$ et qu'elle a pour valeur $3,213 \frac{V}{\omega} = 3,213 \frac{V\tau}{a}$. La différence tient, évidemment, aux termes négligés des séries qui, quoique très petits et presque sans influence sur les grandeurs des ordonnées des courbes qui sont leurs sommes, peuvent néanmoins modifier, d'une façon assez notable, la *pente* de ces courbes. Cette influence est évidente pour les courbes représentant les déplacements des points de la barre aux instants qui suivent immédiatement le choc, c'est-à-dire aux époques $\frac{t}{\tau} = 0,1, 0,2, 0,3, \dots$, jusqu'à 0,9. Puisque τ est égal à $\frac{a}{\omega}$ et que ω est la vitesse de propagation des ébranlements dans la barre, la courbe correspondant à l'époque $\frac{t}{\tau} = 0,5$, par exemple, ne devrait pas dépasser le milieu de la barre; tandis que sur la *Pl. IV* cette courbe rencontre l'axe des abscisses au point $\frac{x}{a} = 0,47$ environ, distant de plus de $0,50a$ de l'extrémité heurtée. De même des autres. Et la différence, très appréciable, montre quelle peut être l'influence des termes négligés et suffit à expliquer le désaccord entre le résultat trouvé graphiquement sur la *Pl. IV* et celui, rigoureusement exact, que donne la *fig. 4* ci-contre.

Sur la même *Pl. IV* se trouvent des courbes en traits plus forts qui ont pour abscisses les temps et qui correspondent chacune à un point de

la barre : ce sont les courbes de la *Pl. I* placées sur un même axe d'abscisses au lieu d'être superposées.

Les *Pl. V* et *VI* sont construites de la même manière que la *Pl. IV* : elles donnent les résultats pour les valeurs de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}, 1, 2$ et 4 . On y voit que la plus grande pente des courbes faisant connaître la plus grande dilatation a été trouvée, pour $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$, égale à $2,1097 \frac{V\tau}{a}$, et que cette valeur correspond à l'époque $\frac{t}{\tau} = 2,25$ et à un point voisin de l'extrémité heurtée de la barre. Ce résultat est en contradiction avec celui que donne le calcul exact. La plus grande dilatation se produit toujours à l'extrémité fixe, et, dans le cas de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$, elle a pour valeur $2,736 \frac{V\tau}{a} = 2,736 \frac{V}{\omega}$, comme le montre la *fig. 4*. Mais cette même figure fait voir que, dans le même cas, il se produit, à l'époque $\frac{t}{\tau} = 2$, et à l'extrémité heurtée, une dilatation égale à $2,360 \frac{V\tau}{a}$ peu inférieure à la plus grande, $2,736 \frac{V\tau}{a}$, qui se produit à l'époque $\frac{t}{\tau} = 3$. Les courbes de la *Pl. V*, applicables au cas de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$, ne sont d'ailleurs dressées que jusqu'à l'époque $\frac{t}{\tau} = 2,75$ et ne pouvaient donner cette plus grande dilatation, que l'incertitude de la direction de la tangente à l'origine n'aurait peut-être pas permis, d'ailleurs, de découvrir.

Pour les autres cas, $\frac{P}{Q} = 1, 2$ et 4 , dont les circonstances sont figurées sur la *Pl. VI*, la dilatation maximum est bien à l'extrémité fixe ; mais la valeur que donne la plus grande pente des tangentes est notablement inférieure à la dilatation calculée par les formules exactes.

Saint-Venant avait comparé, dans les divers cas, cette dilatation maximum à la dilatation moyenne de la barre, au moment où elle est la plus grande. Il avait, pour cela, mesuré la plus grande ordonnée de la courbe représentant les déplacements $\frac{u}{V\tau}$ de l'extrémité heurtée, c'est-à-dire de la courbe marquée $\frac{x}{a} = 1$, et cette plus grande valeur, divisée

par la longueur a de la barre, lui donnait cette plus grande dilatation moyenne. Appelant i_m (p. CCXXXV de l'*Historique* placé en tête de son édition de Navier) la dilatation maximum trouvée par la plus grande pente des courbes, et i_m la dilatation moyenne la plus grande, trouvée comme il vient d'être dit, il avait calculé que, dans les cinq cas qu'il avait étudiés, le rapport $\frac{i_m}{i_m}$ avait les valeurs suivantes :

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad 4;$$

$$\frac{i_m}{i_m} = 1,48, \quad 1,59, \quad 1,84, \quad 2,67, \quad 3,47.$$

Or, si, au moyen des formules (γ_1) de la page 480gg de l'édition française de Clebsch, on calcule la plus grande dilatation $\partial_m = i_m$, qui se produit toujours au point heurté, on trouve respectivement les valeurs suivantes pour le rapport $\frac{i_m}{\frac{P}{Q}}$:

$$3,213, \quad 2,736, \quad 2,271, \quad 2,036, \quad 2,0007;$$

ce rapport tend vers la valeur 2 lorsque $\frac{P}{Q}$ augmente indéfiniment (¹).

D'un autre côté, la plus grande dilatation moyenne i_m , calculée par la formule (μ) de la page 480x du même Ouvrage, donne, pour le rapport $\frac{i_m}{\frac{P}{Q}}$, les valeurs

$$1,907, \quad 1,330, \quad 0,869, \quad 0,491, \quad 0,250;$$

(¹) Les épures de la *Pl. VI* donnent, pour les cas de $\frac{P}{Q} = 1, 2, 4$, les valeurs

$$1,5949, \quad 1,3116, \quad 0,8741,$$

au lieu de celles

$$2,271, \quad 2,036, \quad 2,0007;$$

on voit que le procédé graphique devient de moins en moins exact à mesure que $\frac{P}{Q}$ augmente, ou plutôt que l'influence des termes négligés augmente. Peut-être eût-il fallu, pour obtenir des résultats plus approchés, adopter une échelle beaucoup plus grande pour les figures, ce qui aurait permis de représenter un beaucoup plus grand nombre de termes des séries.

ce rapport tend vers $\frac{Q}{P}$ lorsque $\frac{P}{Q}$ grandit. Il en résulte alors, pour les valeurs exactes du rapport $\frac{i_M}{i_m}$, les nombres

$$\frac{i_M}{i_m} = 1,68, \quad 2,05, \quad 2,61, \quad 4,14, \quad 8,01.$$

au lieu de ceux que Saint-Venant avait trouvés par ses méthodes graphiques (¹). L'erreur que l'on commet en ne tenant compte que de la dilatation moyenne est d'autant plus grande que le poids P de la barre est plus grand par rapport à celui Q du corps heurtant. La dilatation moyenne est alors très faible, tandis que la dilatation maximum ne descend jamais au-dessous de $2 \frac{V\tau}{a} = 2 \frac{V}{\omega}$. Si le travail de Saint-Venant ne lui a pas donné les valeurs exactes, il lui a permis, au moins, de montrer comment on se tromperait grossièrement si l'on prenait la dilatation moyenne d'une barre heurtée pour la dilatation maximum, et si l'on s'en servait pour déterminer les dimensions que doit avoir une barre pour résister à des chocs déterminés. Ce qu'il faut y voir, ce ne sont donc pas les résultats absolus, mais la mise en évidence de cette cause d'erreurs; mais surtout ce qui doit attirer l'attention, c'est le travail en lui-même, l'immense labeur dont il fait preuve, et l'exemple qui peut en être tiré.

II. — CHOC TRANSVERSAL.

Considérons encore une barre prismatique homogène dont nous appellerons

$$2a$$

la longueur ou l'intervalle de ses appuis, qu'on peut, avec Euler, supposer être deux styles pénétrant au milieu de son épaisseur et autour desquels elle puisse tourner en même temps qu'un peu glisser au moyen de

(¹) C'est cet écart, entre les résultats de son travail et ceux du calcul exact, qui avait fait renoncer Saint-Venant à le publier.

petites rainures, afin qu'on puisse abstraire toute résistance à l'extension de son plan moyen fléchi. Supposons-la placée horizontalement et heurtée en son milieu par un corps de poids Q , animé d'une vitesse horizontale V . Prenons pour axe des z la ligne supposée droite unissant les centres de gravité des sections de la barre faites perpendiculairement à cette ligne, et dont nous désignerons encore par σ la superficie supposée constante, l'origine de ces coordonnées étant à l'extrémité de gauche.

Supposons encore que la direction de la vitesse V , parallèlement à laquelle nous prendrons l'axe des x , soit celle de l'un des deux axes principaux d'inertie de la section transversale, et appelons

I le moment d'inertie et λ le rayon de giration de cette section transversale par rapport à son autre axe principal; $I = \sigma \lambda^2$.

u le déplacement subi à l'époque t par le centre de gravité d'une section quelconque d'abscisse z , dans le sens transversal parallèle aux x ,

ρ , g , P , Q , V , E et ω ayant les mêmes significations que précédemment; seulement la longueur de la barre étant $2a$, le poids $P = 2\rho g a \sigma$.

Enfin, posons, pour abréger,

$$(5) \quad \tau^2 = \frac{Pa^3}{2gEI} \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{a}{\lambda} \frac{a}{\omega} = \frac{a^2}{\lambda\omega}.$$

Écrivons l'équilibre de translation, dans le sens transversal de x ou u d'une tranche de longueur dz comprise entre deux sections parallèles, dont la masse est $\frac{P}{2ag} dz$ et dont l'accélération dans le même sens est $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Le moment statique, autour de l'axe d'inertie I tracé sur le plan de la section σ , des forces élastiques ou tensions exercées à travers cette section a pour expression, à un instant quelconque, $EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, et la dérivée de ce moment, par rapport à l'abscisse z , $EI \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$ représente l'effort transversal exercé dans le sens de x ou u par la matière située d'un côté de cette section σ sur celle qui est située de l'autre côté. Sur la section suivante, dis-

tante de dz , cet effort transversal est augmenté de sa différentielle par rapport à z ; il en résulte que la matière de l'élément compris entre ces deux sections voisines est soumise, sur ses deux bases, à des forces moléculaires dont la somme des projections, sur l'axe des x , a pour valeur cette différentielle changée de signe, soit $-EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} dz$; et la somme de ces forces et de l'inertie de l'élément $-\frac{P}{2ag} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz$ doit, d'après le principe de d'Alembert, être égale à zéro, ce qui donne l'équation

$$(6) \quad EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{P}{2ag} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ou bien, d'après l'expression (5) de τ ,

$$(7) \quad \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0,$$

équation générale qui doit être intégrée de manière à satisfaire aux conditions définies, savoir l'immobilité des points d'appui. Mais, vu la symétrie, on peut, et c'est ce que nous ferons dans tout ce qui suivra, ne considérer qu'une seule des deux moitiés de la barre, celle qui est comprise entre $z = 0$ et $z = a$, à la condition d'exprimer que la tangente à la courbe affectée par l'axe de la barre reste constamment, au point $z = a$, parallèle à la ligne des appuis qui est l'axe des z . Cela nous donne les deux premières des équations (8) ci-après. Nous devons exprimer qu'au point d'appui, $z = 0$, le moment de flexion est nul, ce qui fournit la troisième, et enfin écrire l'équilibre d'inertie du poids Q avec les efforts transversaux qui s'exercent tant en deçà qu'au delà du point où il touche la barre et dont chacun a pour valeur, d'après ce que l'on vient de dire,

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \frac{Pa^3}{2g\tau^2} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}.$$

Les conditions définies sont alors les suivantes, dont les deux dernières

expriment les vitesses pour $t = 0$ des divers points de la barre,

$$(8) \left\{ \begin{array}{ll} u = 0, & \text{pour } z = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, & \text{pour } z = a, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & \text{pour } z = 0, \\ \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{Pa^3}{Q} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, & \text{pour } z = a, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = V, & \text{pour } t = 0 \text{ et pour } z = a, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{pour } t = 0, \text{ pour toute autre valeur de } z. \end{array} \right.$$

L'équation indéfinie (7), avec ces conditions particulières, est satisfaite, comme il est facile de le vérifier, par la solution

$$(9) \quad \frac{u}{V\tau} = \sum \frac{4}{m^3} \frac{\frac{\sin \frac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\sinh \frac{mz}{a}}{\cosh m}}{\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\cosh^2 m} + \frac{2}{m^2} \frac{P}{Q}} \sin m^2 \frac{t}{\tau},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m racines réelles et positives de l'équation

$$(10) \quad m(\text{tang } m - \text{tah } m) = \frac{2P}{Q}.$$

Les épures représentant les déplacements u ont été dressées par Saint-Venant dans les trois cas $P = \frac{Q}{2}$, $P = Q$, $P = 2Q$. La première chose à faire était de résoudre l'équation caractéristique (10) pour ces trois valeurs du rapport $\frac{P}{Q}$. Il a dressé une épure à grande échelle permettant d'effectuer graphiquement ce calcul pour toutes les valeurs de ce rapport; mais ce procédé graphique, ne donnant pas une exactitude suffisante, a été complété par la méthode des approximations successives qui

a fourni les valeurs suivantes pour les sept premières racines m de cette équation dans les trois cas considérés :

$\frac{P}{Q}$	$\frac{1}{2}$	1.	2
m_0	1,04799	1,19161	1,31965
m_1	4,03652	4,11972	4,23720
m_2	7,13400	7,18994	7,28084
m_3	10,25664	10,29839	10,37041
m_4	13,38770	13,42093	13,48020
m_5	16,52269	16,55021	16,60043
m_6	19,65969	19,68824	19,72671

On peut alors, pour un point quelconque de la barre, c'est-à-dire pour une valeur donnée de $\frac{z}{a}$, construire les sinusôides dont chacune représente un des termes de la série, c'est-à-dire correspond à une des valeurs de m .

Ces sinusôides sont les courbes en traits légers des *Pl. VII* et *VIII*; elles sont tracées pour cinq points de la demi-barre correspondant aux valeurs de $\frac{z}{a} = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ et 1 ; cette dernière étant relative au milieu de la barre ou au point heurté. On a tracé, sur une même ligne des abscisses, à l'extrémité de laquelle se trouve l'indication $\frac{u}{V\tau} = 0$, les cinq sinusôides correspondant à ces cinq points et à la première et plus petite valeur m_0 de m ; les sinusôides relatives aux valeurs suivantes m_1, m_2, \dots ont été, en vue d'éviter la confusion, tracées sur des lignes d'abscisses spéciales pour chacun des cinq points et placées au-dessus des premières. Puis, par l'addition au compas des ordonnées des sinusôides se rapportant à chaque point, on a obtenu les courbes sinueuses, en traits plus gros, dont chacune représente, pour l'un des cinq points de la barre, les déplacements à une époque quelconque mesurée par l'abscisse.

Ces courbes donnent lieu aux remarques suivantes :

Toutes les sinusôides correspondant à une même valeur de m ont même base $\frac{\pi}{m^2}$, quel que soit le point de la barre auquel elles s'appliquent; elles ne diffèrent les unes des autres que par la hauteur. En particulier, celles

qui représentent le premier terme de la série ou qui correspondent à la valeur m_0 ont pour base $\frac{\pi}{m_0^2} = 2,86046$ dans le cas de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$; leur ordonnée maximum se trouve donc à l'abscisse $\frac{t}{\tau} = 1,43023$, quel que soit le point considéré.

Or le premier terme est toujours prépondérant, principalement lorsqu'il approche de son maximum; il en résulte que le déplacement maximum de tous les points de la barre se produit, à fort peu près, à la même époque, $t = 1,43023\tau$. Il y aurait peut-être exception pour les points très voisins des points d'appui, mais cette loi se vérifie encore très bien pour le point $z = 0,2a$. On voit immédiatement sur l'épure que le déplacement maximum des quatre points $\frac{z}{a} = 0,2; 0,4; 0,6$ et $0,8$ se trouve entre $\frac{t}{\tau} = 1,40$ et $\frac{t}{\tau} = 1,45$. Pour le point $\frac{z}{a} = 1$, le maximum d'écart se produit à l'époque $\frac{t}{\tau} = 1,35$. Il se produit donc, vers cette époque, $t = 1,43\tau$, une sorte de déplacement latéral maximum dans toute la longueur de la barre. Cette vibration principale n'a pas la même netteté que dans les cordes vibrantes, car les vibrations secondaires qui s'y superposent ont des durées qui ne sont pas des parties aliquotes de la sienne.

Toutes les courbes sont, pour $t = 0$ ou à l'origine, tangentes à l'axe des abscisses, avec lequel même elles se confondent dans de très petites étendues, parce que l'ébranlement ne se transmet pas instantanément du point milieu aux points d'appui. Il y a exception, bien entendu, pour les courbes relatives à $z = a$ ou au point heurté: la tangente à l'origine y fait un angle de 45° avec l'axe des abscisses; car, à l'instant initial $t = 0$, on a, en ce point, $\frac{du}{dt} = V$. Or les ordonnées étant $\frac{u}{V}, \frac{t}{\tau}$ et les abscisses $\frac{t}{\tau}$, la valeur du rapport $\frac{du}{dt}$ s'obtiendra en mesurant le coefficient angulaire de la tangente et en le multipliant par V , ce qui exige bien que ce coefficient angulaire ait la valeur 1 à l'origine.

Les courbes des déplacements pour les points voisins des appuis s'élèvent d'abord au dessus de l'axe des abscisses $u = 0$ aussitôt qu'elles s'en sont détachées, et montrent que, par une sorte de réaction, les u commen-

ent par être négatifs. Pour rendre cet effet plus sensible, Saint-Venant a dressé, à une échelle 12 fois et demie plus grande, le commencement des courbes relatives au cas $\frac{P}{Q} = 1$. Ces courbes amplifiées constituent la *Pl. IX*, qui n'est ainsi autre chose que ce qui se trouve déjà sur la *Pl. VIII*, dans l'angle supérieur de gauche : les 2^{cm} qui, sur cette Planche, expriment les déplacements depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à $t = 0,1\tau$ sont amplifiés de manière à occuper 25^{cm} de largeur de la *Pl. IX*, et les ordonnées sont agrandies dans la même proportion.

On voit alors que le mouvement de recul ou de réaction est déjà appréciable au point $z = 0,8a$, c'est-à-dire près du point heurté; il augmente à mesure que l'on s'approche du point d'appui $z = 0$ et, pour $z = 0,2a$, l'écart $-u$, en arrière de la position primitive, atteint environ $0,013 V\tau$, alors que le déplacement positif du même point, à l'instant où il est le plus grand, est d'environ $0,17 V\tau$. Ce point $z = 0,2a$ recule donc d'abord d'environ $\frac{1}{13}$ de son déplacement maximum ultérieur.

Une autre particularité, révélée par les épures de Saint-Venant, est que le troisième terme de la série correspondant à la valeur de m , est très petit pour $z = 0,4a$ et pour $z = a$, ce qui tient à ce que ce terme change de signe aux environs des points $\frac{z}{a} = 0,4$ et $\frac{z}{a} = 1$. Il en résulte alors que les sinuosités dues à ce troisième terme sont très peu sensibles et que la courbe des déplacements de ces deux points affecte une forme beaucoup moins serpentante ou ondulée que celles des autres points. Elle ne présente pour ainsi dire que de grandes ondulations, tandis que les autres sont bien plus sinueuses.

Mais ces courbes, ayant pour abscisses les temps, ne sont pas propres à donner ce que l'on cherche, savoir la courbure maximum de l'axe de la pièce mesurée par la dérivée seconde du déplacement par rapport à la coordonnée z . Il faut donc construire de nouvelles courbes ayant toujours pour ordonnées les déplacements, mais ayant pour abscisses les valeurs de $\frac{z}{a}$, c'est-à-dire tracer les courbes représentant, à diverses époques, la forme de l'axe longitudinal de la barre heurtée.

Ces courbes sont figurées sur les deux dernières planches. La *Pl. X* contient celles relatives aux deux cas $P = \frac{1}{2}Q$ et $P = 2Q$; les courbes y sont construites à des intervalles $\frac{t}{\tau} = 0,10$, depuis l'instant du choc $\frac{t}{\tau} = 0$ jusqu'au moment où les déplacements ont atteint leurs plus grandes valeurs et commencent à diminuer, c'est-à-dire jusqu'à $t = 1,5\tau$ pour le cas de $P = \frac{1}{2}Q$, et jusqu'à $t = 1,1\tau$ pour celui de $P = 2Q$. Les ordonnées sont toujours, comme sur les feuilles précédentes, les déplacements ou les rapports $\frac{u}{v\tau}$; mais les abscisses sont les distances $\frac{z}{a}$ des points de la barre à son extrémité de gauche. La *Pl. XI* contient les courbes analogues pour le cas de $P = Q$, mais elles y sont construites à des intervalles $\frac{t}{\tau} = 0,05$ moitié moindres, et, de plus, on a représenté le second quart de période ou les états successifs de la barre, depuis le moment où les déplacements ont atteint leurs plus grandes valeurs jusqu'à celui où elle est revenue à sa position primitive et l'a même un peu dépassée. Les courbes du premier dessin correspondent aux époques comprises entre $t = 0$ et $t = 1,25\tau$, et celles du second aux époques comprises entre $t = 1,30\tau$ et $t = 2,25\tau$.

Toutes ces courbes des *Pl. X* et *XI* tournent généralement leur concavité en haut; cependant, près des appuis, pour $z = 0,2a$ et $z = 1,8a$, elles tournent leur convexité par suite des réactions dont il a été parlé.

Si même on avait tracé les courbes correspondant à des époques plus voisines de $t = 0$, le rebond ou recul se serait trouvé à des points plus rapprochés du milieu de la barre; ainsi, sur la *Pl. XI*, où l'on a tracé, exceptionnellement, en ligne ponctuée, les courbes correspondant à $t = 0,025\tau$ et $t = 0,05\tau$, on voit que la courbe est convexe vers le haut aux points $0,6a$ et $1,4a$ à la première de ces époques. On retrouve ici, sous une forme plus visible, ce que l'on avait appris de l'examen des courbes des *Pl. VII, VIII et IX*.

Dans les trois cas, la courbe correspondant à l'époque $t = 0,3\tau$ présente cette singularité, que la courbure au milieu de la barre disparaît et se présente même dans un sens opposé à celui qu'elle avait depuis

l'époque $t = 0$ et qu'elle reprend ensuite à partir de $t = 0,4\tau$. On peut remarquer aussi que la courbe $t = 0,4\tau$ est tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de ses deux voisines et qu'elle affecte une forme générale plus régulière que les autres.

La plus grande flèche, calculée, diffère très peu de ce qu'elle serait si la série Σ était réduite à son premier terme, où m a la valeur m_0 de la plus petite racine : c'est la valeur de u pour $z = a$ et pour $\sin \frac{m^2 t}{\tau} = 1$. En la désignant par f , on a donc, approximativement,

$$f = V\tau \frac{4}{m_0^3} \frac{\frac{\sin m_0}{\cos m_0} - \frac{\sinh m_0}{\cosh m_0}}{\frac{1}{\cos^2 m_0} - \frac{1}{\cosh^2 m_0} + \frac{1}{m_0^2} \frac{P}{Q}};$$

mais, puisque m_0 est racine de l'équation caractéristique (10), le numérateur de cette fraction, ou $\tan m_0 = \tanh m_0$, est égal à $\frac{2P}{Qm_0}$; d'où, en substituant et réduisant,

$$(11) \quad f = \frac{4V\tau}{m_0^2 + \frac{Q}{2P}m_0^4 \left(\frac{1}{\cos^2 m_0} - \frac{1}{\cosh^2 m_0} \right)},$$

formule qui donnera la flèche avec une approximation suffisante. Pour les trois cas pour lesquels le calcul a été fait, la différence entre la valeur exacte, trouvée au moyen d'un grand nombre de termes, et la valeur approchée ci-dessus, ou l'erreur relative, est de 1 à 3 centièmes. Voici les résultats de la comparaison :

Pour $\frac{P}{Q}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Valeurs de $\frac{f}{V\tau}$ { exactes	0,739	0,477	0,297
d'après (11) ...	0,732	0,473	0,289

L'époque où se produit la plus grande flèche est, dans les mêmes cas,

$\frac{t}{\tau}$	1,34	1,18	0,82
------------------------	------	------	------

Mais, ce qui est plus intéressant, comme nous l'avons dit, au point de vue de la résistance de la barre, c'est la *plus grande courbure* prise par sa fibre moyenne, ou le maximum, en valeur absolue, de $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; car ce qu'il convient de limiter, au point de vue de la sécurité, c'est la plus grande dilatation des fibres de la barre, laquelle a pour valeur, comme on sait, cette dérivée seconde multipliée par la demi-épaisseur de la barre dans le sens de u ou de sa flexion. Les courbes des *Pl. X* et *XI* peuvent donner cette plus grande courbure avec une approximation très suffisante pour les applications. Voici comment a opéré Saint-Venant.

Pour mesurer la courbure d'un petit arc $N_0 N_1$, d'une quelconque de ces courbes, il suppose d'abord que le milieu N de cet arc est au point le plus bas de la courbe, et il l'assimile à une portion de parabole ayant son axe vertical, son sommet en N et une corde $N_0 N_1 = c$; l'équation de cette courbe, de la forme $z^2 = 2Au$, fournira $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{A}$, valeur de la courbure, et, comme la flèche f de cet arc est liée à sa corde c par la relation $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 2Af$, on obtient, pour la courbure, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{8f}{c^2}$. Or il est facile de voir que, si le petit arc, remplacé par une portion de parabole à axe vertical et dont N est le milieu, est pris partout ailleurs qu'au bas d'une des courbes, on aura la même expression pour sa courbure, à la condition que c représente alors la projection de sa corde sur l'axe des z ou la différence $z_1 - z_0$ des abscisses de ses points extrêmes N_1 , N_0 et que f soit sa flèche, mesurée parallèlement aux u entre son point milieu N et sa corde. On a donc, avec toute l'approximation désirable, en mesurant ces petites lignes c et f en un endroit quelconque de l'une des courbes des *Pl. X* et *XI*, la valeur absolue de la courbure

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{8f}{c^2}.$$

Or on reconnaît facilement, par l'examen de ces planches, que le point de la plus grande courbure n'est pas, pour toutes les courbes, à leur milieu; mais, dans la courbe où cette courbure maximum a sa grandeur la

plus considérable, *c'est au milieu qu'elle se trouve*. Il s'agit alors de trouver la plus grande flèche, au milieu, sur un arc égal à deux divisions $0,2a$ de la barre, et cette flèche se mesure plus facilement sur les courbes des *Pl. VII* et *VIII* que sur celles des *Pl. X* et *XI* : il suffit de rechercher les points où la courbe $z = 0,8a$ s'écarte le plus de celle $z = a$. On reconnaît ainsi que :

Pour le cas de $P = \frac{1}{2}Q$, la plus grande courbure a lieu aux instants $t = 1,25\tau$ et $t = 1,65\tau$, un peu avant et un peu après celui ($t = 1,34\tau$) où la flèche de la barre atteint sa plus grande valeur ;

Pour le cas de $P = Q$, la plus grande courbure a lieu à l'instant $t = 1,20\tau$, à peu près en même temps que la plus grande flèche ($t = 1,18\tau$) ;

Pour le cas $P = 2Q$, elle a lieu aux instants $t = 0,75\tau$ et $t = 1,1\tau$, ou très peu avant et sensiblement après l'instant ($t = 0,82\tau$) de la plus grande flèche.

Les courbures maximum mesurées, comme il vient d'être dit, ont été trouvées respectivement :

Pour $\frac{P}{Q}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Plus grandes courbures $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$..	$2,60 \frac{V\tau}{a^2}$	$1,75 \frac{V\tau}{a^2}$	$1,30 \frac{V\tau}{a^2}$

On a des coefficients numériques bien moins différents les uns des autres quand on divise ceux-ci par les trois valeurs correspondantes de $\sqrt{\frac{Q}{P}}$; on a ainsi

$$(12) \quad \max. \text{ de } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1,839 \frac{V\tau}{a^2} \sqrt{\frac{Q}{P}}, \quad 1,75 \frac{V\tau}{a^2} \sqrt{\frac{Q}{P}}, \quad 1,838 \frac{V\tau}{a^2} \sqrt{\frac{Q}{P}}.$$

En appelant b la largeur de la barre dans le sens u ou de la flexion, la plus grande dilatation des fibres sera, comme on a dit, la plus grande courbure multipliée par $\frac{b}{2}$, et c'est à ce produit qu'on doit imposer une limite qui, si R_0 désigne la charge de sécurité à l'extension de la matière

constituant la barre, est exprimée par le rapport $\frac{R_0}{E}$. Écrivons cette égalité dans les trois cas, élevons au carré et remplaçons τ^2 par sa valeur $\frac{Pa^3}{2gEI}$; réduisons et tirons la valeur de $\frac{QV^2}{2g}$ ou de la force vive du corps heurtant : nous obtenons respectivement

$$\frac{QV^2}{2g} = \begin{cases} 0,04928 \\ 0,05442 \\ 0,04933 \end{cases} \left(\frac{R_0^2}{E} \frac{24aI}{b^2} \right), \quad \text{pour } \frac{P}{Q} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{cases}.$$

Si la pièce de longueur $2a$ est rectangulaire, de largeur b et de hauteur h , son moment d'inertie $I = \frac{hb^3}{12}$ et le facteur $\frac{24aI}{b^2} = 2abh$ n'est autre chose que son *volume*. On retrouve donc ainsi, à peu près, le théorème de Young, établi par lui en négligeant l'inertie de la barre, et d'après lequel la *résistance vive* d'une pièce rectangulaire heurtée au milieu, ou la limite à imposer au produit du poids du corps qui la heurte par la hauteur de chute génératrice de sa vitesse de choc est égale au $\frac{1}{18} = 0,055556$ du produit de son volume par le coefficient $\frac{R_0^2}{E}$, qu'il appelle le module de *résilience* transversale de la matière dont elle est composée.

« Mais on conçoit qu'il faudrait un plus grand nombre de calculs rigoureux portant sur d'autres exemples pour s'assurer de l'approximation de cette sorte de compensation des causes d'augmentation et des causes de diminution du coefficient numérique quand le rapport des poids Q et P varie. » (Note du § 61 de la traduction française de Clebsch, p. 561).

Sous la même réserve, on peut donner aux expressions (12) une autre forme, en y remplaçant τ par sa valeur $\frac{a^2}{\lambda\omega}$, λ étant le rayon de giration de la section transversale de la barre par rapport à l'axe principal perpendiculaire au plan de flexion. On a ainsi

$$\max. \text{ de } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1,839 \frac{V}{\lambda\omega} \sqrt{\frac{Q}{P}}, \quad 1,75 \frac{V}{\lambda\omega} \sqrt{\frac{Q}{P}}, \quad 1,838 \frac{V}{\lambda\omega} \sqrt{\frac{Q}{P}},$$

et, pour la dilatation maximum, produit de la plus grande courbure par

la demi-largeur $\frac{b}{2}$ de la barre,

$$\text{Plus grande dilatation} = \left\{ \begin{matrix} 1,839 \\ 1,75 \\ 1,838 \end{matrix} \right\} \frac{b}{2\lambda} \frac{V}{\omega} \sqrt{\frac{Q}{P}}.$$

Le rapport $\frac{b}{2\lambda}$ est toujours plus grand que l'unité : il est égal, pour une section rectangulaire, à $\sqrt{3} = 1,732$; la plus grande dilatation, pour des barres de cette forme, serait donc exprimée approximativement par $(3,03 \text{ ou } 3,18) \frac{V}{\omega} \sqrt{\frac{Q}{P}}$ ou, en chiffres ronds, par

$$3 \frac{V}{\omega} \sqrt{\frac{Q}{P}}.$$

Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire pour une même valeur du rapport $\frac{P}{Q}$ (comprise entre $\frac{1}{2}$ et 2), la dilatation maximum produite par un choc longitudinal a pour expression

$$2 \frac{V}{\omega} \left(1 + e^{-\frac{2P}{Q}} \right),$$

de sorte que les valeurs respectives du rapport à $\frac{V}{\omega}$ de la dilatation maximum sont, dans les trois cas, de

	$\frac{P}{Q}$	$\frac{1}{2}$	1.	2.
Pour le choc	longitudinal ...	2,74	2,27	2,04
	transversal.....	4,48	3,03	2,24

Ces dernières sont égales aux précédentes multipliées par

$$1,63, \quad 1,33, \quad 1,10.$$

Par conséquent, si une barre prismatique rectangulaire est d'abord fixée à une extrémité et heurtée longitudinalement à son extrémité libre, puis fixée à ses deux extrémités et heurtée transversalement en son milieu par un corps dont le poids soit égal au sien, la sécurité de sa résistance

sera également compromise si la vitesse du corps heurtant, dans le choc longitudinal, dépasse d'un tiers celle du même corps dans le choc transversal, ou est égale aux $\frac{4}{3}$ de cette dernière. Ce rapport des vitesses augmente et diminue en même temps que le poids du corps heurtant : il atteint à peu près $\frac{5}{3}$ lorsque ce poids est double de celui de la barre et descend à $\frac{11}{10}$ lorsque le corps heurtant ne pèse que la moitié de la barre qu'il heurte. Et, si la même loi se continue, on peut dire que, lorsque le poids du corps heurtant est un peu moindre que la moitié de celui de la barre, il y a sensiblement égalité entre les vitesses qui mettent la sécurité en péril soit par choc transversal, soit par choc longitudinal.

Ces chiffres ne s'appliquent, bien entendu, qu'à une barre dont la section est rectangulaire. Pour les sections d'une autre forme, on aurait des proportions différentes. Ainsi, par exemple, si la barre a une section circulaire ou elliptique, le rapport des vitesses d'un même corps heurtant, qui produirait dans cette barre une même dilatation maximum par choc longitudinal et par choc transversal, serait respectivement, pour les valeurs précédentes du rapport $\frac{P}{Q}$:

$$1,88, \quad 1,53, \quad 1,27.$$

Enfin, dans la comparaison de ces deux sortes de choc, il y a une considération qu'il me paraît important de signaler : c'est la différence qui existe entre les durées des périodes des vibrations principales représentées par le premier terme des séries.

Dans le choc longitudinal, la demi-période ou la durée de l'intervalle qui sépare une dilatation maximum de la contraction maximum qui la suit ou la précède est égale à $\frac{\pi a}{m_0 \omega}$, a étant la longueur de la barre et m_0 la plus petite des racines de l'équation transcendante (4).

Dans le choc transversal, cette même demi-période est égale à $\frac{\pi \tau}{m_0^2}$, et τ , d'après (5), est égal à $\frac{a^2}{\lambda \omega}$; mais a ne représente plus ici que la demi-longueur de la barre. Pour comparer les deux cas, nous devons donc remplacer a^2 par $\frac{a^2}{4}$, et la demi-période du choc transversal devient alors $\frac{\pi a^2}{4 m_0^2 \lambda \omega}$,

m_0 étant la plus petite racine de l'équation (10). En vue de simplifier la comparaison, admettons, ce qui est vrai pour certaines valeurs du rapport $\frac{P}{Q}$, que m_0 , dans les deux cas, soit égal à l'unité, le rapport des deux demi-périodes se réduira à $\frac{4\lambda}{a}$. Pour peu que la barre prismatique ait une certaine longueur par rapport à ses dimensions transversales, λ , inférieur à la demi-épaisseur, sera une très petite fraction de $\frac{a}{4}$, c'est-à-dire que, en général, les vibrations longitudinales se succèdent beaucoup plus rapidement que celles qui sont dues à un choc transversal. Les premières ne peuvent être perçues, le plus ordinairement, que par leur effet acoustique, tandis que les autres, pour des barres un peu longues, deviennent distinctes à la vue et surtout au toucher.

En terminant, je crois devoir faire observer que, de même que dans la théorie du choc longitudinal, la solution qui vient d'être donnée pour le choc transversal suppose que les sections transversales de la barre restent planes et se meuvent tout d'une pièce sans se déformer. Or cette hypothèse est certainement plus éloignée de la réalité dans le second cas que dans le premier; car, le choc transversal ne pouvant avoir lieu que sur une portion limitée du contour de la section, les particules de cette section, situées du côté opposé, ne peuvent être mises en mouvement qu'après qu'il s'est déjà produit, au point heurté, une déformation plus ou moins grande, laquelle se propage sans doute, dans la barre, suivant des surfaces sphériques ou ellipsoïdales ayant ce point pour centre et qui ne peuvent être assimilées à des sections transversales planes qu'à une distance supérieure à un assez grand nombre de fois l'épaisseur de la barre.

L'étude de la propagation du mouvement, à l'intérieur d'une barre élastique heurtée en un point de sa surface, a été faite par M. Boussinesq dans son Ouvrage sur l'Application des potentiels, mais elle conduit à des formules trop compliquées pour qu'il semble possible d'en déduire des résultats pratiques.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I. — CHOC LONGITUDINAL.

Cas de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$. Courbes donnant le mouvement des cinq points
 $\frac{x}{a} = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 \text{ et } 1.$

Les abscisses sont les temps, ou plutôt les rapports $\frac{t}{\tau}$ à l'échelle de 0^m,05 par unité.

Les ordonnées des courbes en gros traits sont les déplacements, ou plutôt les rapports $\frac{u}{V\tau}$ à l'échelle de 0^m,05 par unité.

Les courbes en traits légers sont les sinusôides, dont chacune donne une portion de

$$\frac{u}{V\tau} = \sum \frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mx}{a} \sin \frac{mt}{\tau}$$

ou un des termes de la série \sum répondant à l'une des racines m_0, m_1, \dots de l'équation

$$m \tan m = \frac{P}{Q} = \frac{1}{4}.$$

PLANCHE II. — CHOC LONGITUDINAL.

Courbes préparatoires ou sinusôides auxiliaires.

Les abscisses sont les temps ou les rapports $\frac{t}{\tau}$ à l'échelle de 0^m,10 par unité.

Les ordonnées sont, à la même échelle, les valeurs de

$$\frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mt}{\tau}$$

pour $m = m_0, m_1, \dots$, racines de l'équation

$$m \tan m = \frac{P}{Q},$$

le rapport $\frac{P}{Q}$ étant pris successivement égal à $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ et 4 .

Les demi-bases ou quarts de période sont les valeurs de $\frac{\pi}{2m}$.

Les hauteurs des sinusoïdes sont les valeurs de

$$\frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)}.$$

Sur chaque sinusoïde est inscrite l'indication m_0, m_1, \dots de la racine à laquelle elle se rapporte.

(Au lieu de m_3, m_4, \dots , on a mis simplement l'indice 3, 4, ...)

PLANCHE III. — CHOC LONGITUDINAL.

Courbes préparatoires (sinusoïdes) pour le cas de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$.

Les abscisses sont les valeurs de $\frac{x}{a}$ à l'échelle de 0^m,25 par unité. La ligne des abscisses représente donc la barre heurtée.

Les ordonnées sont les valeurs de

$$\frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mt}{\tau} \sin \frac{mx}{a}$$

pour diverses valeurs de $\frac{t}{\tau}$ et pour les valeurs successives de $m = m_0, m_1, \dots$. Ces ordonnées sont à l'échelle de 0^m,10 par unité.

Chaque sinusoïde répond à une valeur particulière du rapport $\frac{t}{\tau}$ comprise entre 0 et 3,50; quelques-unes conviennent, à très peu près, à plusieurs valeurs de ce rapport. On a écrit sur chaque courbe la valeur correspondante de $\frac{t}{\tau}$, ou bien, lorsqu'il y aurait eu confusion, on a écrit ces valeurs au-dessus ou au-dessous de la figure, dans le même ordre que les lignes auxquelles elles se rapportent.

Les hauteurs des sinusoïdes sont prises au compas sur la Pl. II.

PLANCHE IV. — CHOC LONGITUDINAL.

Cas de $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$.

Les courbes en traits légers, dont chacune répond à un instant déterminé ou à une valeur de $\frac{t}{\tau}$ inscrite sur elle, ont pour abscisses les $\frac{x}{a}$, à l'échelle de 0^m,25 par unité, et pour ordonnées les déplacements contemporains ou plutôt les valeurs du rapport

$$\frac{u}{V\tau} = \sum \frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{mx}{a} \sin \frac{mt}{\tau},$$

à l'échelle de 0^m,10 par unité.

Les courbes plus sinueuses, en gros traits, ont aussi pour ordonnées les $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$, mais pour abscisses les temps $\frac{t}{\tau}$, à l'échelle de 0^m,05 par unité, en sorte que chacune est relative à un point déterminé de la barre, ou à une valeur de $\frac{x}{a}$.

Près de la courbe correspondant à $\frac{x}{a} = 1$, se trouve tracée une courbe ponctuée : c'est la sinusoïde que l'on aurait pour $x = a$, si la série était réduite à son premier terme.

PLANCHE V. — CHOC LONGITUDINAL.

$$\text{Cas de } \frac{P}{Q} = \frac{1}{2}.$$

(Même légende qu'à la Pl. IV.)

PLANCHE VI. — CHOC LONGITUDINAL.

$$\text{Cas de } \frac{P}{Q} = 1, \quad \frac{P}{Q} = 2, \quad \frac{P}{Q} = 3, \quad \frac{P}{Q} = 4.$$

(Même légende qu'à la Pl. IV.)

PLANCHE VII. — CHOC TRANSVERSAL.

Cas de $P = \frac{Q}{2}$. Courbes donnant les déplacements transversaux, à une époque quelconque, de cinq points de la barre heurtée.

Les courbes en traits fins sont des sinusoïdes, dont chacune donne un terme de la série

$$\sum \frac{4}{m^3} \frac{\frac{\sin \frac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\sinh \frac{mz}{a}}{\cosh m}}{\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\cosh^2 m} + \frac{2}{m^2} \frac{P}{Q}} \sin \frac{m^2 t}{\tau}$$

pour la valeur de $\frac{z}{a}$ qui est inscrite à la gauche du cadre et pour la valeur de m inscrite sur la courbe.

Les courbes en traits plus gros, dont les ordonnées sont les sommes de celles des premières, représentent les déplacements de cinq points de la barre.

Les abscisses sont les temps, ou plutôt les rapports $\frac{t}{\tau}$ à l'échelle de 0^m,20 par unité.

Les ordonnées sont les déplacements, ou plutôt les rapports $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$ à l'échelle de 0^m,20 par unité.

PLANCHE VIII. — CHOC TRANSVERSAL.

$$\text{Cas de } P = Q, \quad P = 2Q.$$

(Même légende qu'à la *Pl. VII.*)

PLANCHE IX. — CHOC TRANSVERSAL.

$$\text{Cas de } P = Q.$$

Épure d'une portion de courbes ayant pour abscisses les temps (ou plutôt les $\frac{t}{\tau}$) et pour ordonnées les déplacements (ou plutôt les $\frac{u}{V\tau}$) à une échelle $12\frac{1}{2}$ fois plus grande que celle des *Pl. VII* et *VIII*, soit à l'échelle de 2^m,50 par unité.

PLANCHE X. — CHOC TRANSVERSAL.

$$\text{Cas de } P = \frac{1}{2}Q, \quad P = 2Q.$$

Courbes représentant les états successifs des barres depuis l'instant du choc jusqu'un peu après celui où le premier quart de la période d'oscillation est révolu.

Chaque courbe correspond à un instant ou à une valeur de $\frac{t}{\tau}$ inscrite à côté d'elle.

Les ordonnées sont les déplacements $\frac{u}{V\tau}$ à l'échelle de 0^m,25 par unité.

Les abscisses sont les longueurs ou plutôt les $\frac{x}{a}$ à la même échelle de 0^m,25 par unité.

PLANCHE XI. — CHOC TRANSVERSAL.

$$\text{Cas de } P = Q.$$

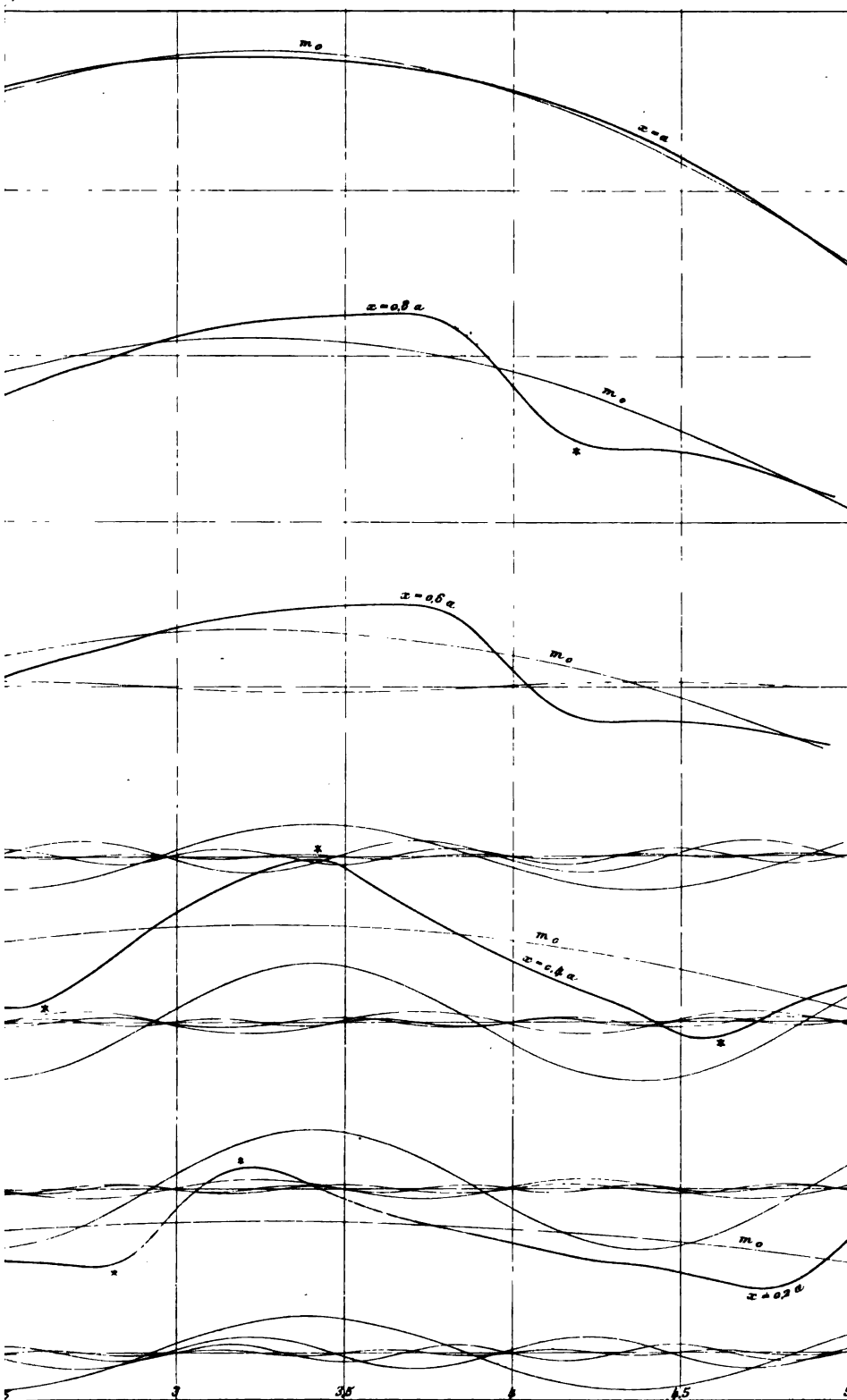
Fig. 1. — Courbes représentant les états successifs de la barre, depuis l'instant du choc jusqu'à celui où les déplacements ont atteint leurs plus grandes valeurs.

Fig. 2. — Courbes représentant les états successifs de la barre, depuis l'instant où les déplacements ont atteint leurs plus grandes valeurs jusqu'à celui où elle est revenue à la position primitive et même un peu au delà. Chaque courbe correspond à un instant ou à une valeur de $\frac{t}{\tau}$ inscrite à côté d'elle.

Les abscisses sont les rapports $\frac{x}{a}$ à l'échelle de 0^m,25 par unité.

Les ordonnées sont les déplacements $\frac{u}{V\tau}$ à la même échelle.



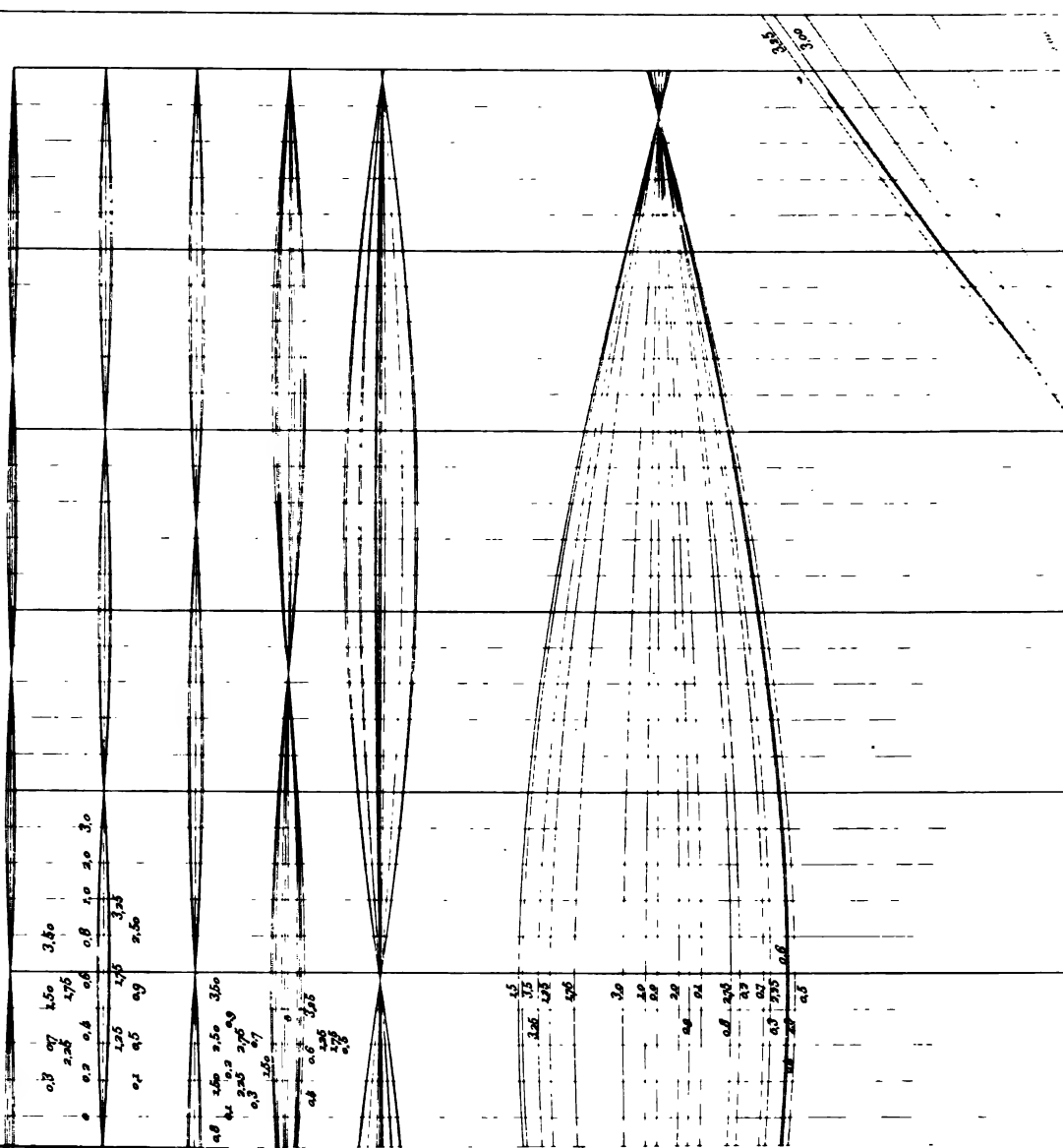


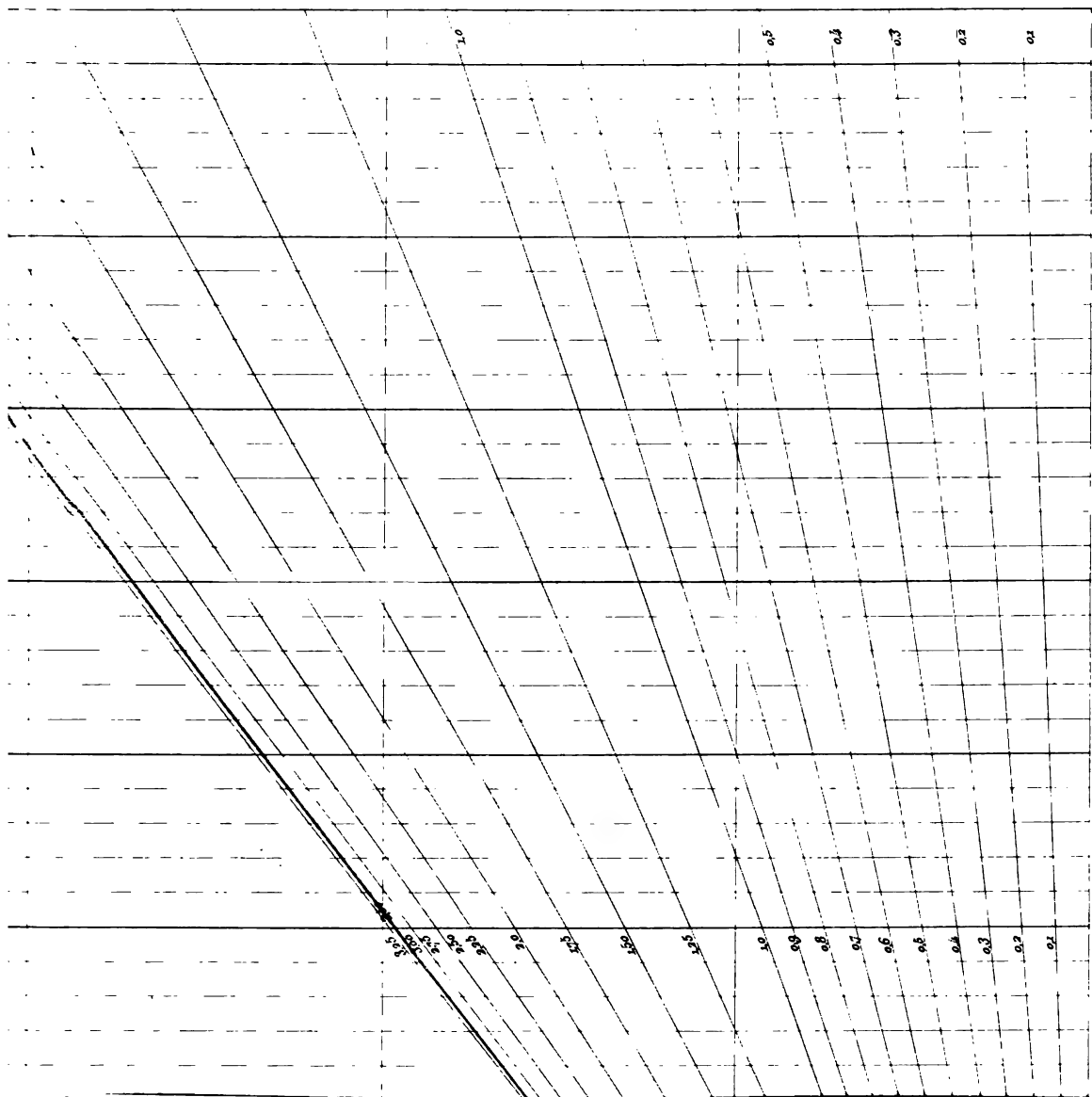
longitudinal

PL. II.

Choc longitudinal.

Pl. III.





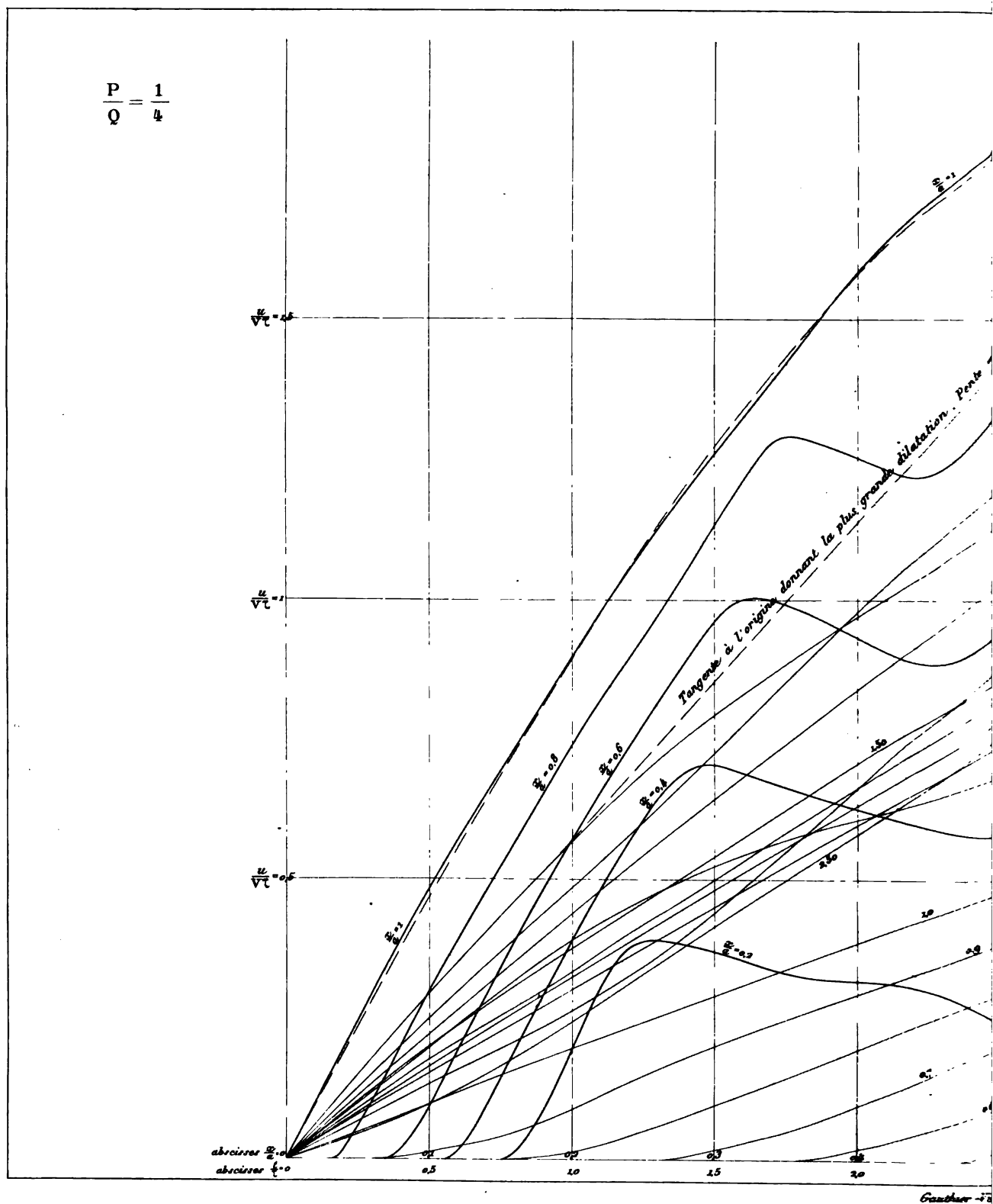
0.5
Niveau
de la barre

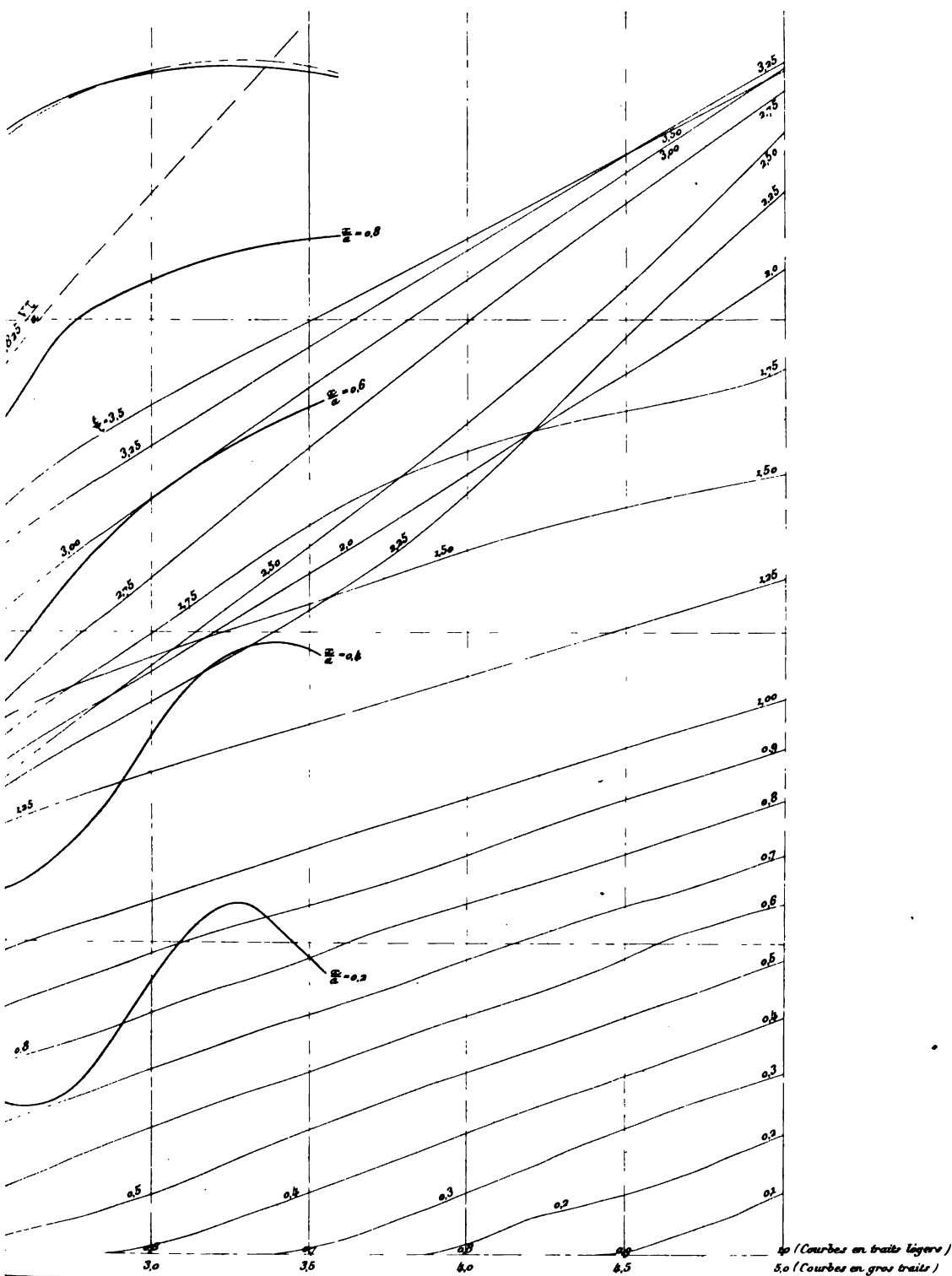
1.0
Extremité
haute

Gauthier-Villars & Fils, Eds.

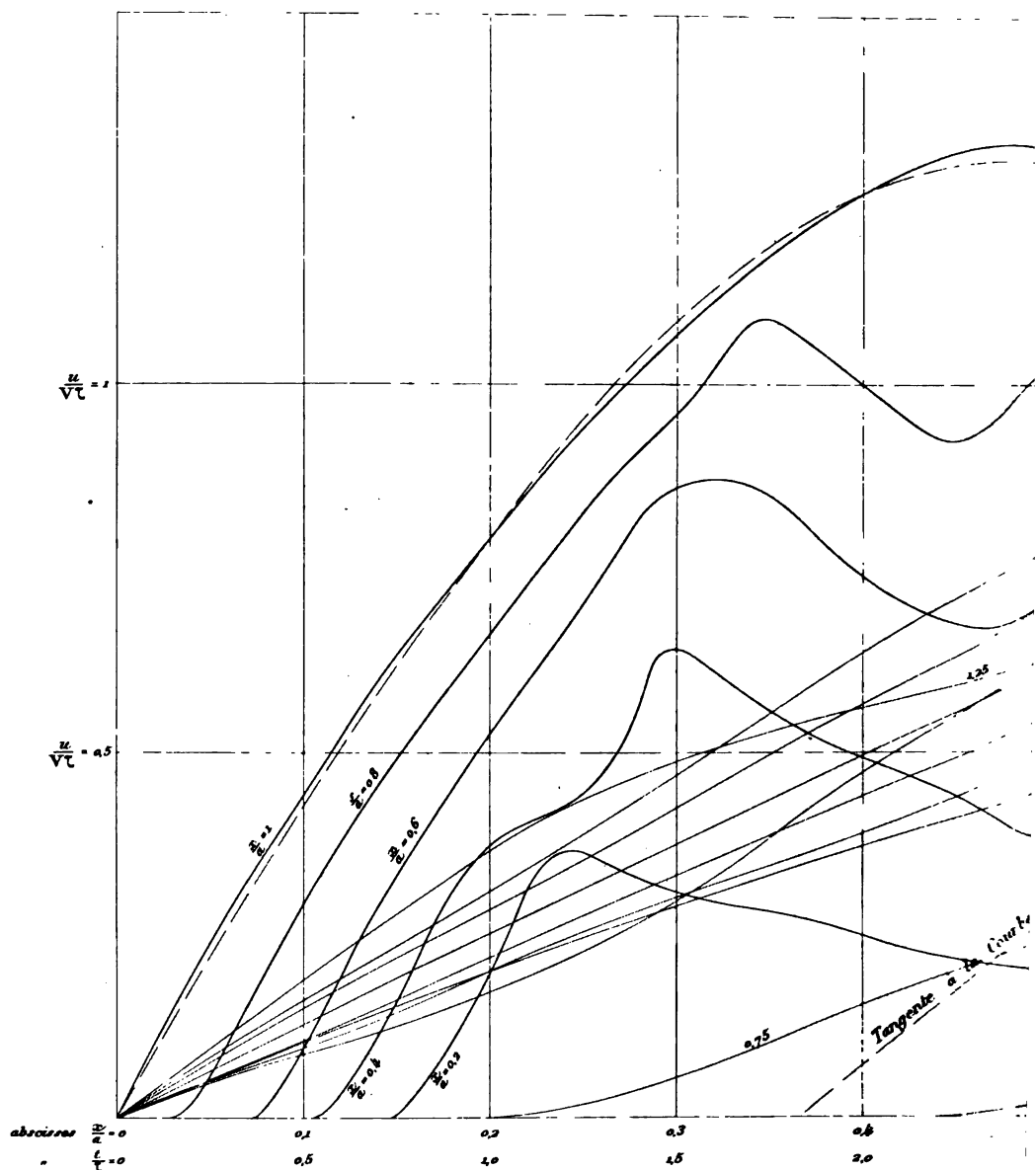
St. Tenant del.

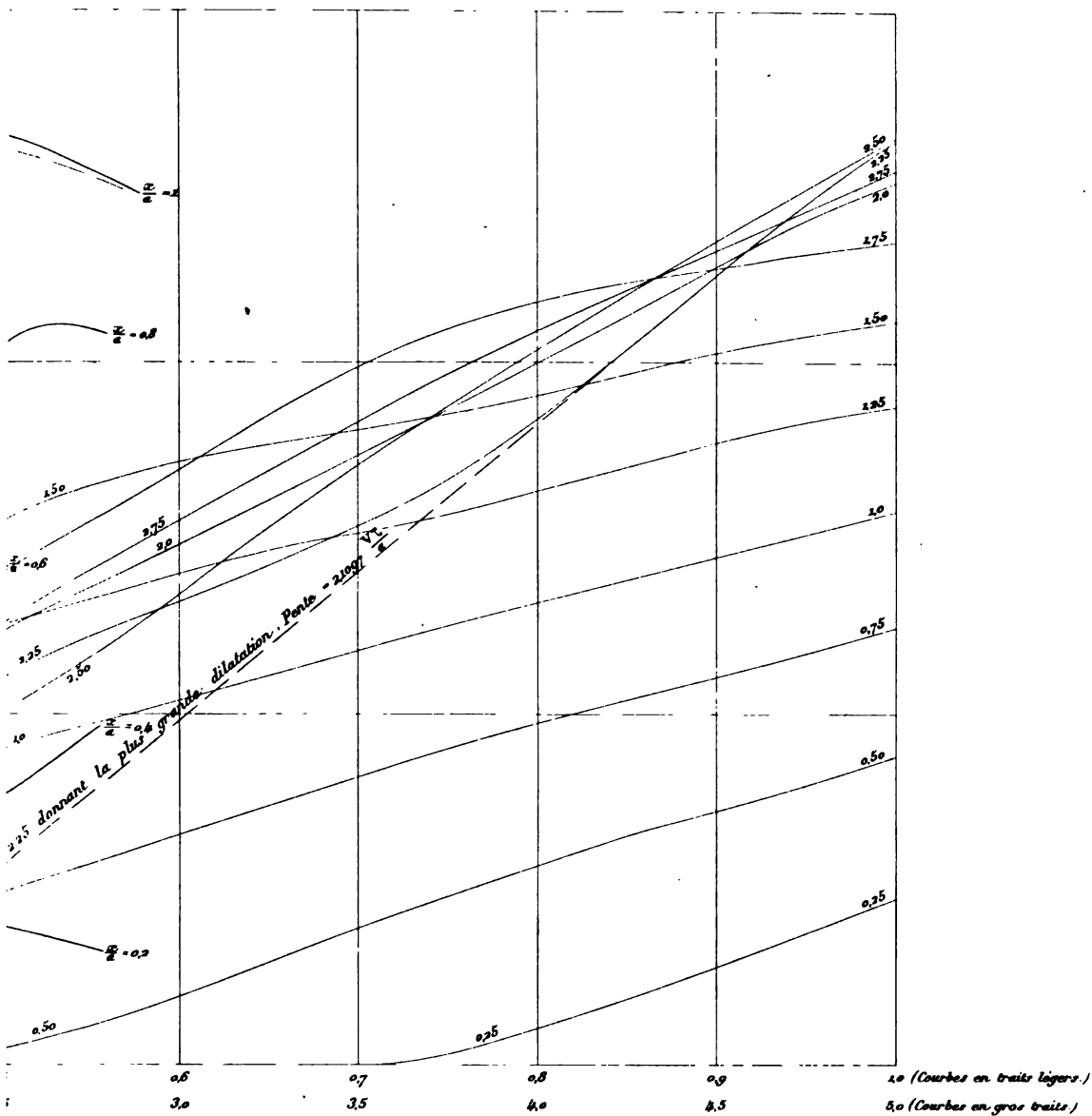
$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$$

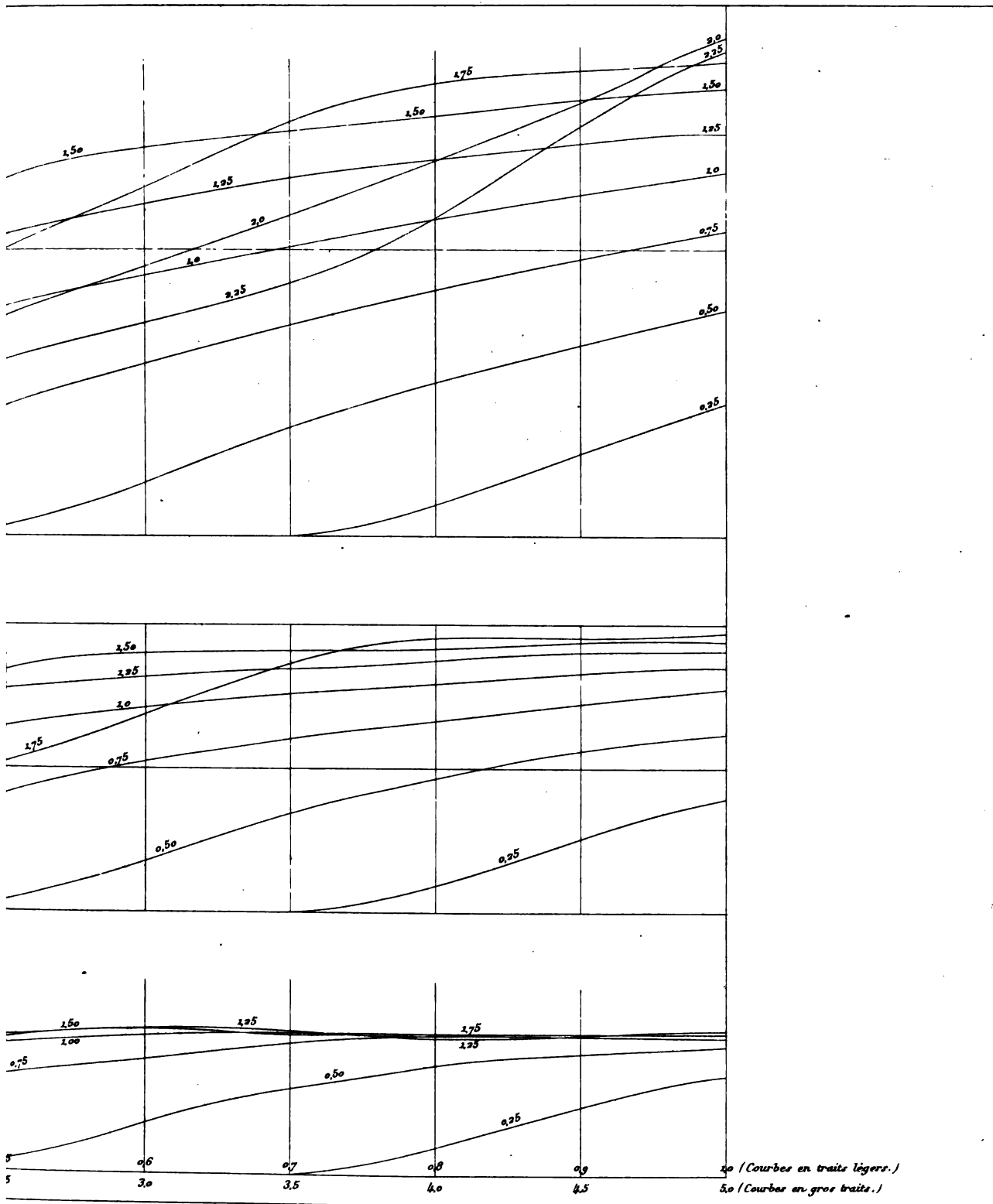


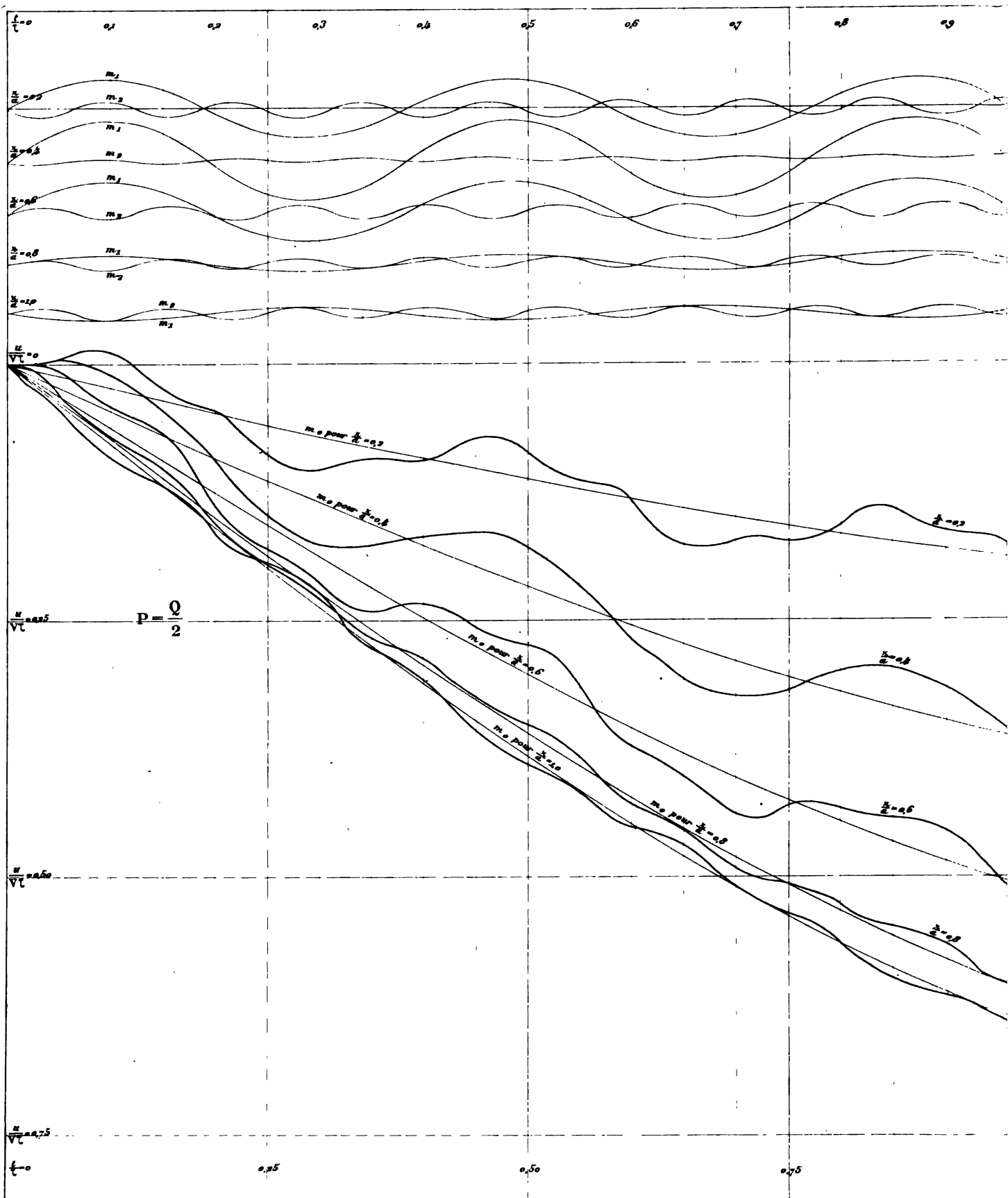


$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$$

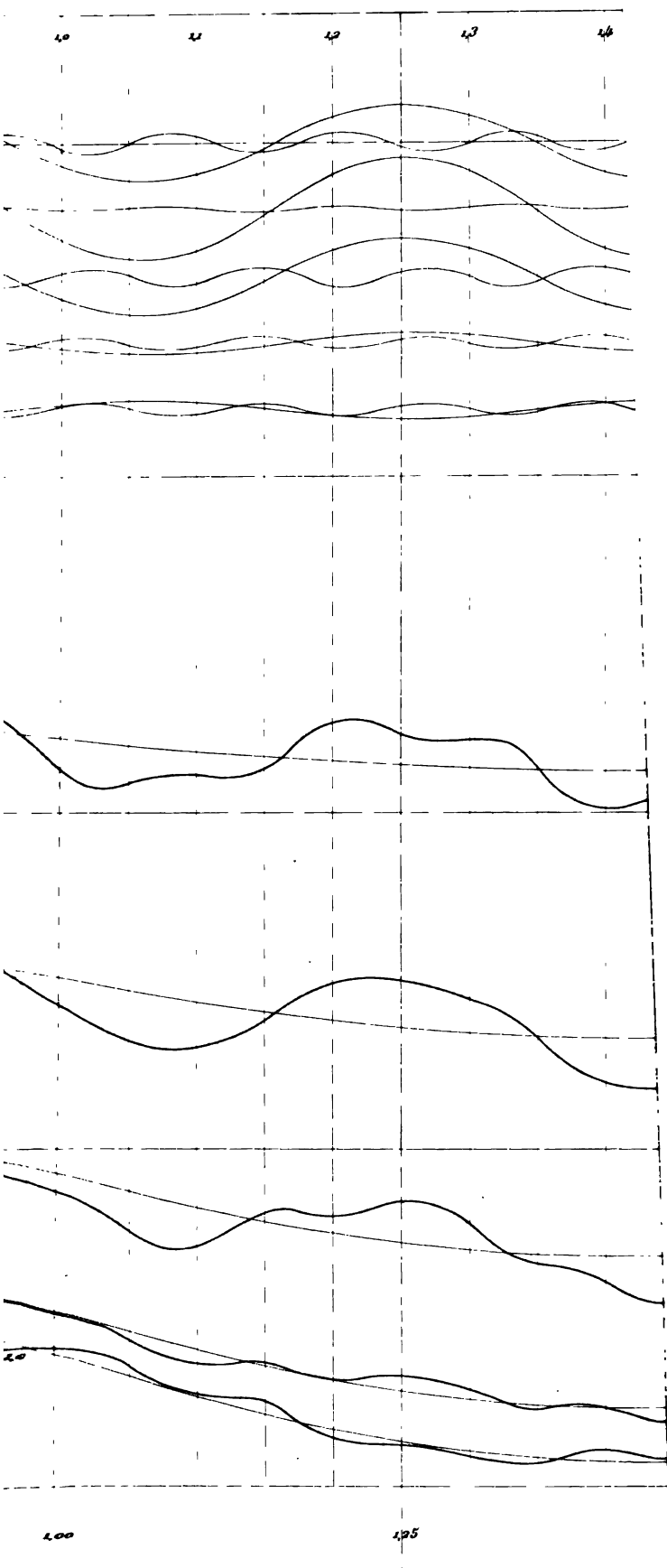




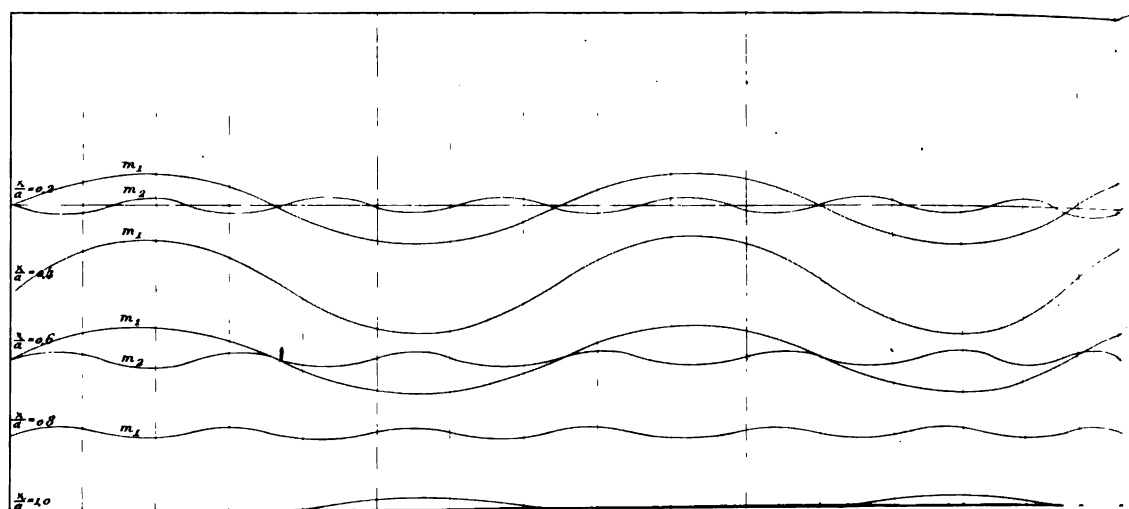


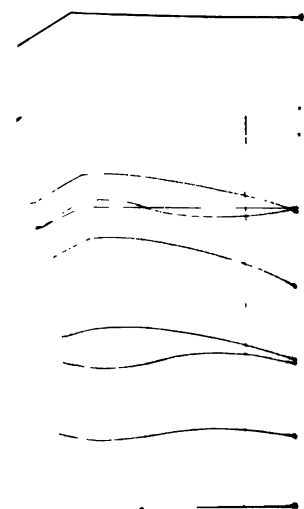


Choc transversal.





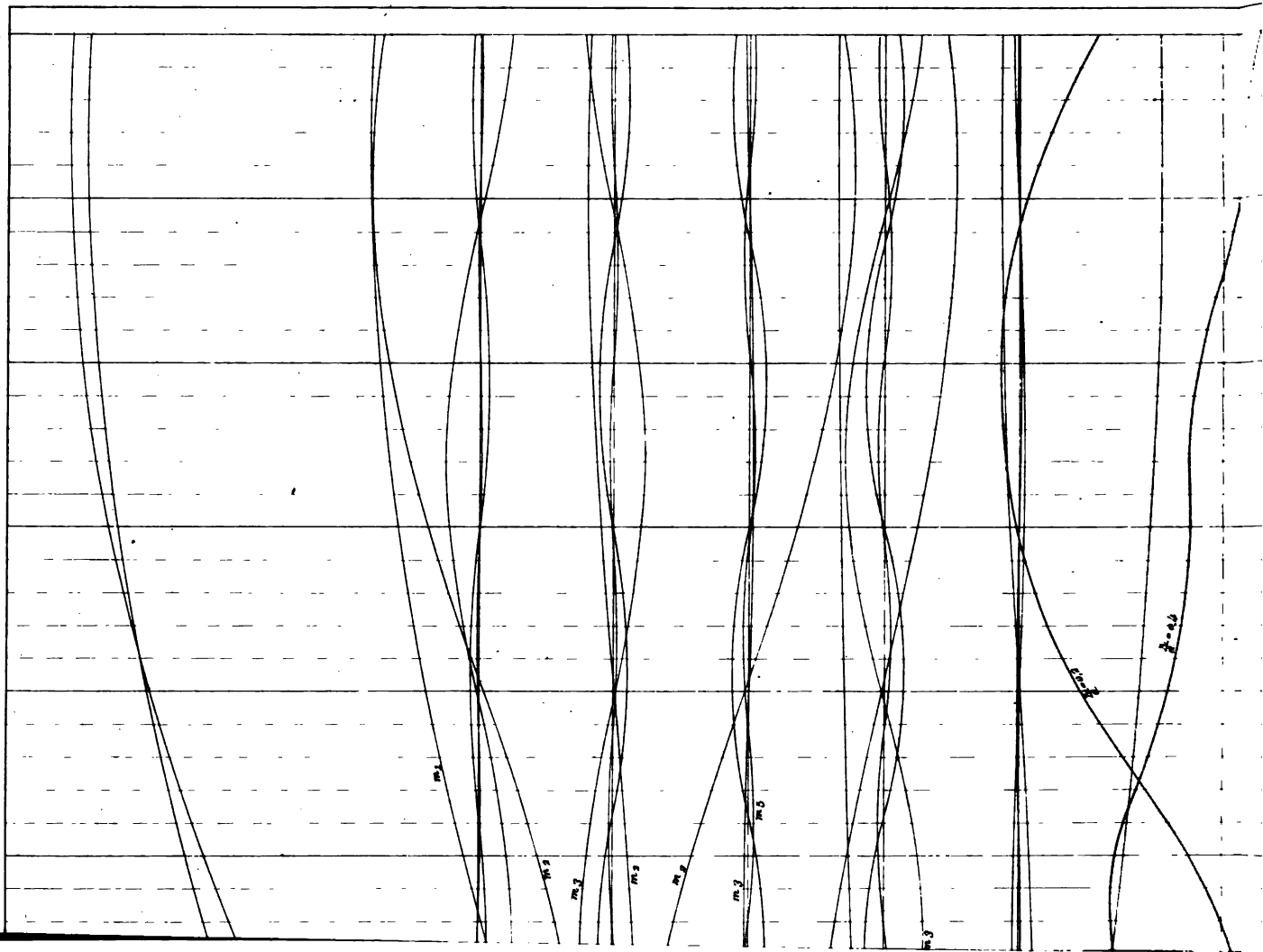


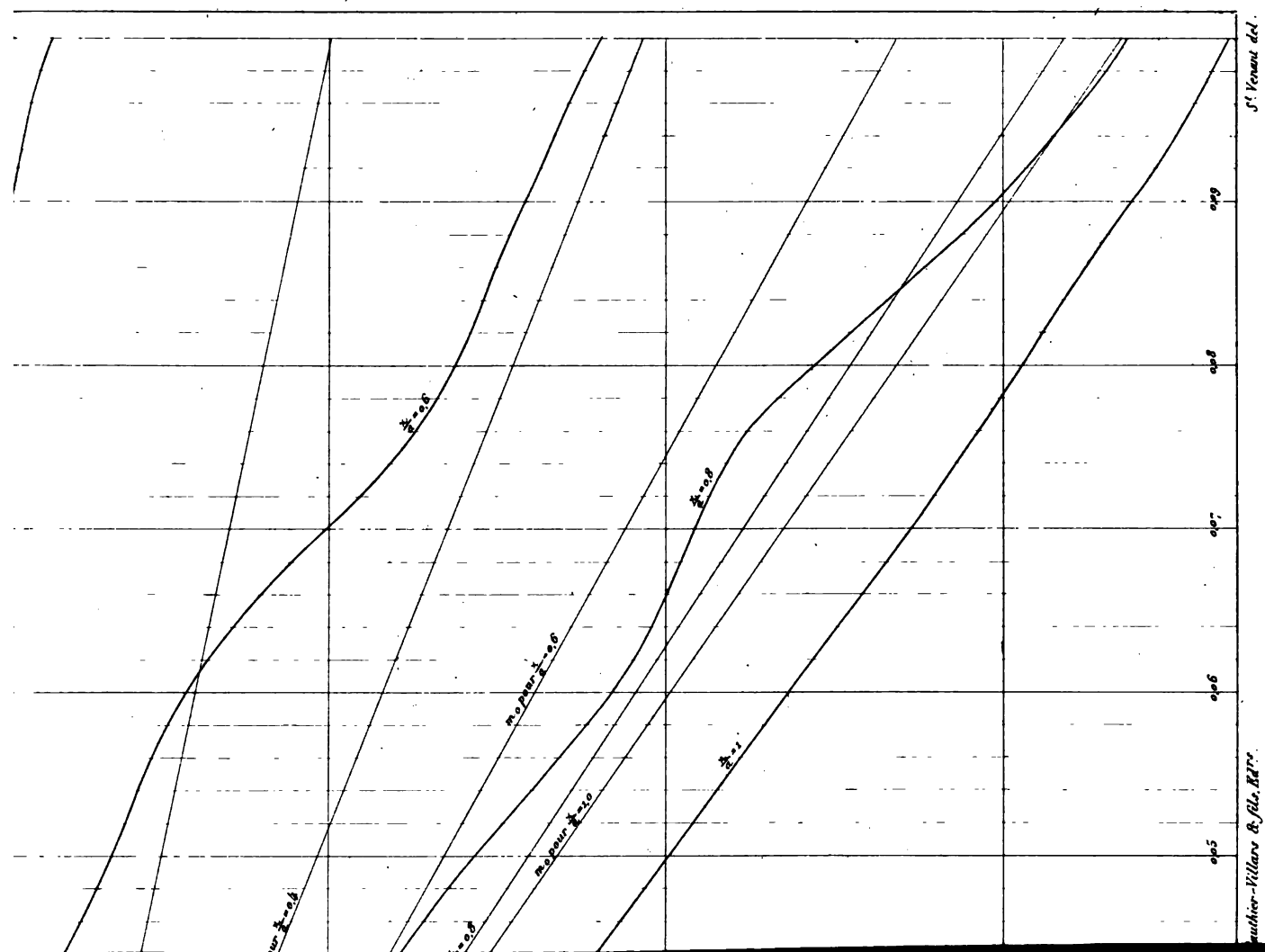


1

e transversal.

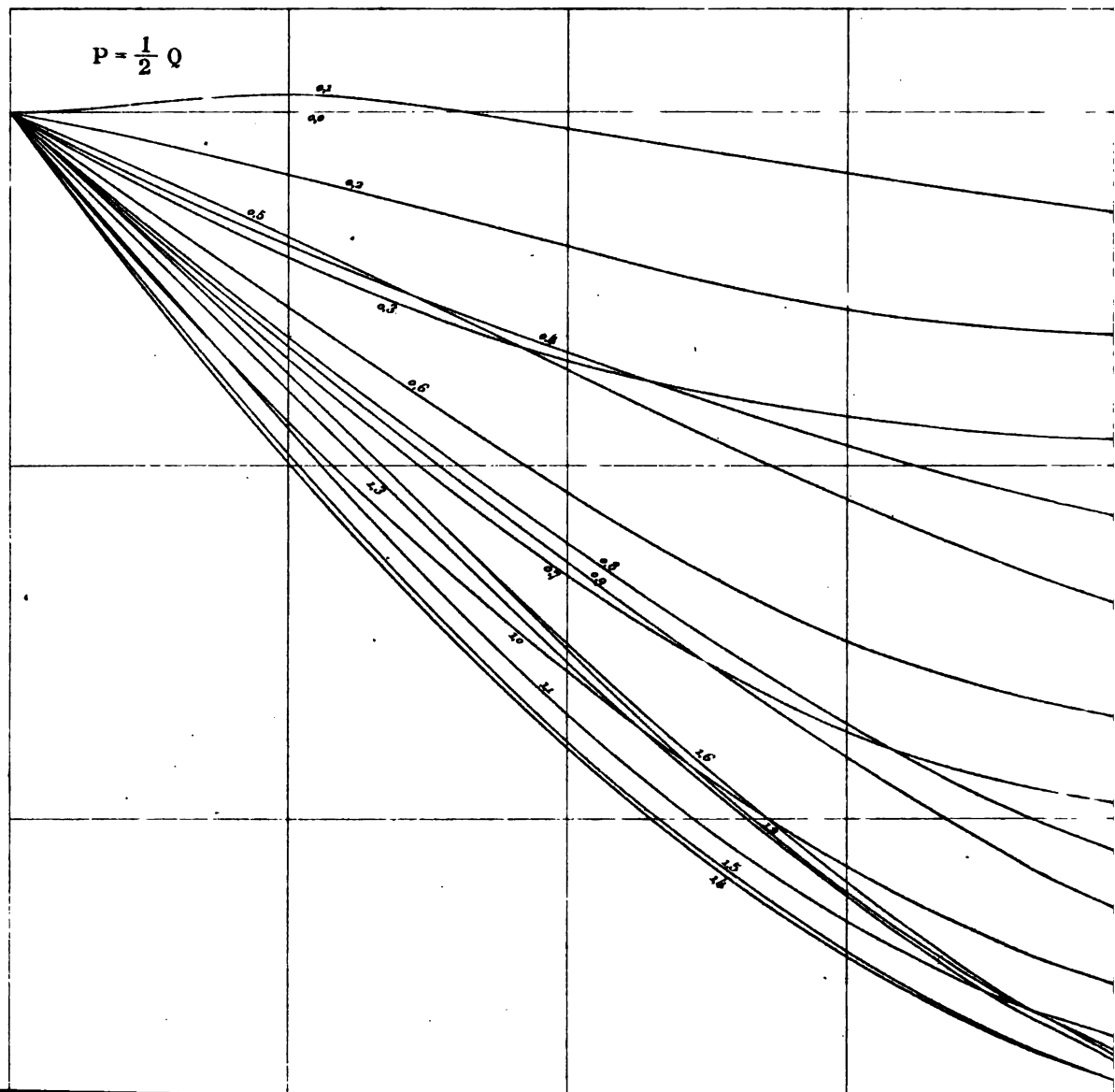
Pl. IX.



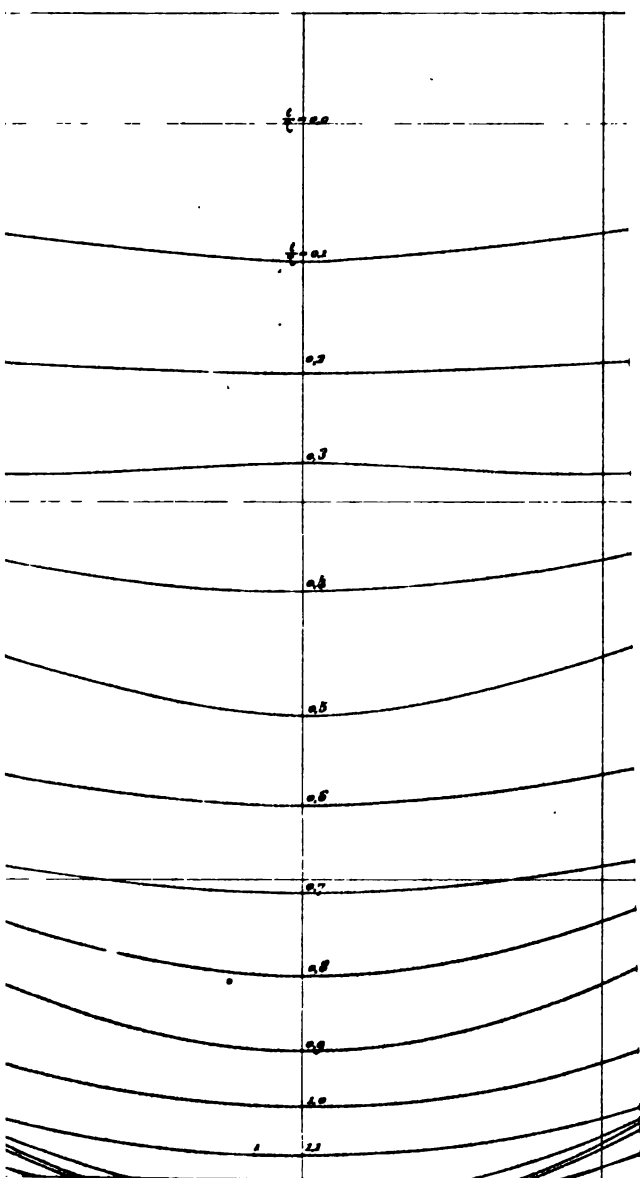


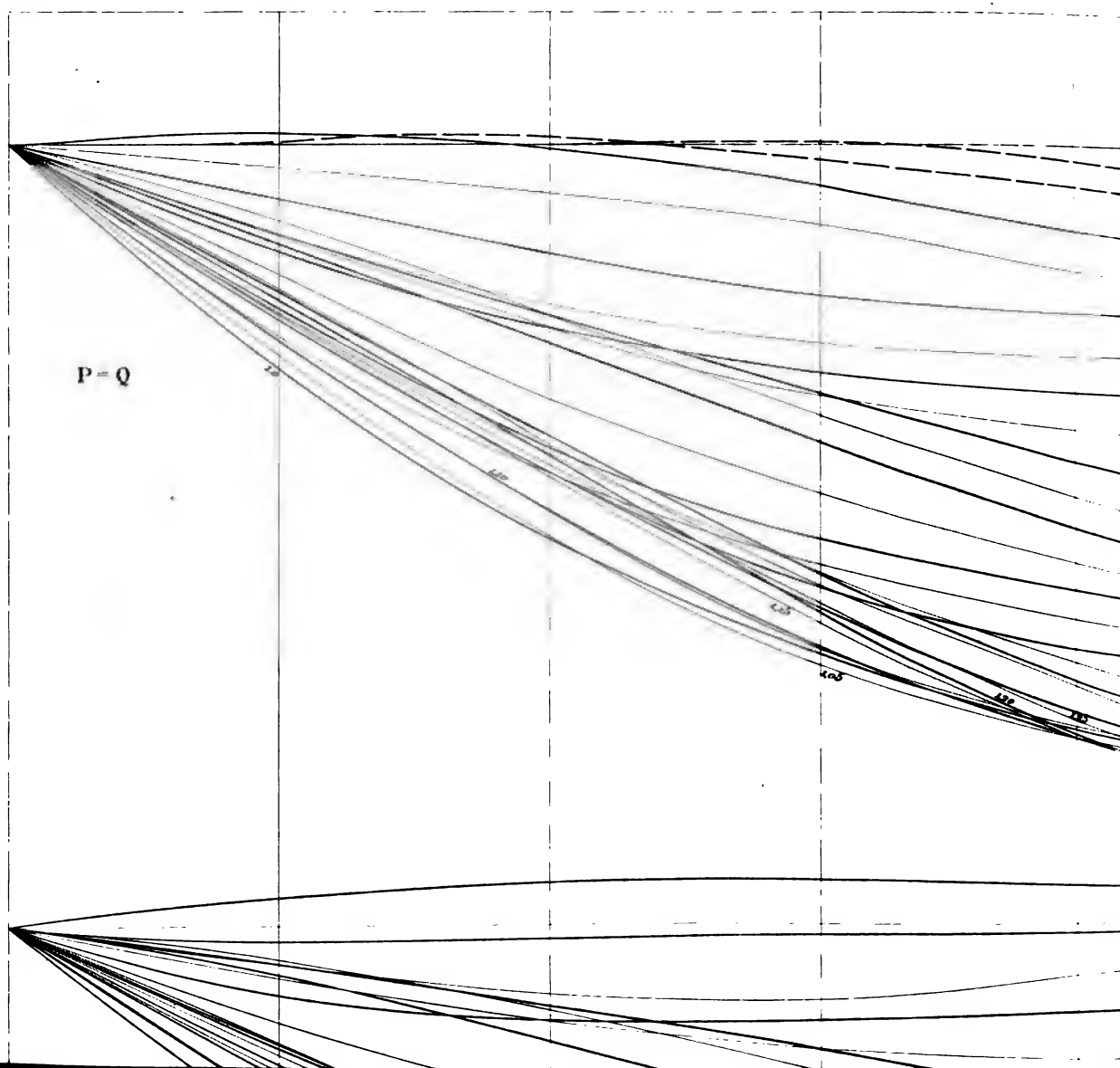
Maithier-Villars & fils, Bd^{rs}.

S^t Venant del.



Choc transversal.





Choc transversal.

Fig. 1



Fig. 2

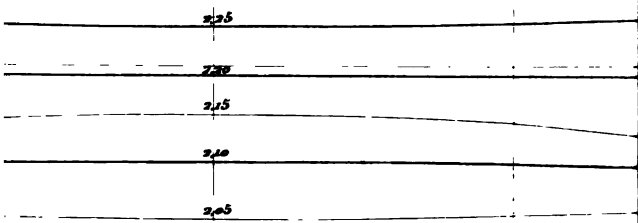


TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
SUR UNE CONDITION DE BON FONCTIONNEMENT DES INSTALLATIONS MÉCANIQUES COMPORTANT DES TRANSMISSIONS PAR LIENS RIGIDES OU FLEXIBLES; par M. <i>H. Léauté</i> , Répétiteur de Mécanique.	I
MÉMOIRE SUR LES INVARIANTS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SUR LEURS APPLICATIONS; par M. <i>Roger Liouville</i>	7
SUR L'INTENSITÉ DE LA LUMIÈRE; par M. <i>J. Moutier</i>	77
COURBES REPRÉSENTATIVES DES LOIS DU CHOC LONGITUDINAL ET DU CHOC TRANSVERSAL D'UNE BARRE PRISMATIQUE, dressées par feu <i>de Saint-Venant</i> , Membre de l'Institut, publiées par M. <i>Flamant</i> , Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.	97
Explication des Planches.	124
PLANCHES I A XI.	

LOUIS-ANTHONY VILLARS ET FILS, 104, rue des Capucins-Anciens, 105, à Paris.

Reçu par la poste. — Envoi par la poste. — Envoi par la poste. — Envoi par la poste.

BERTRAND J. — *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Électricité.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

HAESSE. — *Cours de Mécanique et Machines professé à l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

CHASLES. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

CHEVREUL E. — *Recherches chimiques sur les corps gras d'origine animale.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

COMBES. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

PARAT. — *Complément d'Algèbre.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

PARAT. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

JURUAN. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

JURUAN. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

JURUAN. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

LAURENT. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

LAURENT. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

LAURENT. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

LAURENT. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

TOUS. — *Leçons de Géométrie.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

TOUS. — *Leçons de Géométrie.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

MANNHEIM. — *Ch. de l'École Polytechnique.* — 1874. — 1 vol. — 12 fr.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

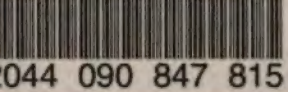
*Departmental
Library*

DUE APR 16 '50

DUE FEB 17 '51

JUL 17 '51 H

~~APR 18 1952~~



044 090 847 815